

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.



**SEXTA ESCUELA
LATINOAMERICANA
DE MATEMATICAS**



**INTRODUCCÓN
A LA TEORIA DE SIGIAS**

V. W. Vasconcelos

Oaxtepec, Morelos, julio de 1992

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL





SEXTA ESCUELA LATINOAMERICANA DE MATEMATICAS



Oaxtepec, Morelos, julio de 1982

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL





SEXTA ESCUELA LATINOAMERICANA
DE MATEMATICAS
Oaxtepec, Morelos
12 al 23 de Julio de 1982

Patrocinadores:

Centro de Investigación y de
Estudios Avanzados del IPN

Organización de Estados Americanos

Universidad Nacional
Autónoma de México

Instituto Politécnico Nacional

Universidad Autónoma Metropolitana

Consejo Nacional de
Ciencia y Tecnología

Subsecretaría de Educación Superior e
Investigación Científica, SEP

Subsecretaría de Educación e
Investigación Tecnológicas, SEP

INTRODUCCION A LA
GEOMETRIA Y VARIEDADES
HIPERBOLICAS
A. Verjovsky

SEXTA ESCUELA LATINOAMERICANA DE MATEMATICAS
Oaxtepec, Morelos, Julio de 1982

CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCION	1
2. GEOMETRIA HIPERBOLICA PLANA	9
2.1 Geometría elíptica.	11
2.2 Geometría euclidiana.	13
2.3 Geometría hiperbólica.	14
2.19 Distancia hiperbólica.	22
2.42 Discos y circunferencias no euclidianas.	35
2.60 Areas.	50
2.74 Angulo de paralelismo.	60
2.76 Unidad de medida.	61
2.77 Como se topologiza el "horizonte".	62
2.78 El plano proyectivo \mathbb{P}^2 .	63
2.79 Coordenadas y transformaciones proyectivas.	65
2.83 Cónicas.	68
2.91 El modelo proyectivo del plano hiperbólico.	75
2.97 Dualidad.	80
2.104 Métrica en el modelo proyectivo.	86
2.110 El modelo del hiperboloide (o de la esfera de radio imaginario).	89
2.118 Fórmulas trigonométricas en la geometría hiperbólica plana.	95
3. GEOMETRIA HIPERBOLICA n-DIMENSIONAL	107
3.1 Modelo del disco de Poincaré.	107
3.5 El modelo de hemisferio sur.	112
3.6 El modelo de hemiespacio superior.	113
3.9 El modelo proyectivo.	114
3.11 El modelo del hiperboloide.	118
3.14 Orbesferas y oribolas.	122
3.22 Discos y esferas hiperbólicas.	126
3.23 Vecindades tubulares geodésicas.	127
3.24 Isometrías.	128
3.30 Isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .	138
4. ESTRUCTURAS GEOMETRICAS EN VARIEDADES	143
4.4 Ejemplos de pseudogrupos y G-variedades.	144
5. ALGUNAS VARIEDADES CON ESTRUCTURA HIPERBOLICA	161
5.3 Ejemplo de una variedad hiperbólica con frontera totalmente geodésica.	167

	Pág.
6. APLICACION DESARROLLADORA Y HOLONOMIA	177
6.12 Ejemplos.	188
7. SUPERFICIES OBTENIDAS DE TRIANGULOS IDEALES	193
8. VARIETADES HIPERBOLICAS DE DIMENSION TRES OBTENIDAS A PARTIR DE TETRAEDROS	203
8.3 Condiciones necesarias para obtener variedades hiperbólicas a partir de tetraedros.	208
9. ESTUDIO DE LA COMPLETACION METRICA DE M EN LA VECINDAD DE UN VERTICE	217
10. EL COMPLEMENTO DEL NUDO "CON FORMA DE OCHO" Y DEL ENLACE DE WHITEHEAD	223
BIBLIOGRAFIA	227

1. INTRODUCCION.

Un resultado fundamental en la teoría de las superficies de Riemann es el teorema de uniformización de Koebe y Poincaré [Ko][Po]. Este teorema establece que cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es homeomorfa, mediante un homeomorfismo conforme, ya sea a la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco unitario abierto en el plano complejo. Cada una de estas superficies, la esfera S^2 , el plano complejo \mathbb{C} y el disco unitario Δ posee una métrica riemanniana completa con curvatura 1, 0, y -1, respectivamente. Con estas métricas S^2 , \mathbb{C} y Δ son modelos de la geometría elíptica (o esférica) euclidiana (o parabólica) y no euclidiana (o hiperbólica), respectivamente. En realidad en el caso de la geometría elíptica se toma como modelo el plano proyectivo.

Desde tiempos de Euclides se trató de demostrar que la única geometría consistente del espacio era la geometría euclidiana. En particular, se preguntaba si el postulado V era dependiente de los otros, es decir, si su negación no conducía a contradicción alguna. En la primera mitad del siglo pasado fueron encontrados los primeros modelos de geometrías no euclidianas por los matemáticos K.F. Gauss (quien, desafortunadamente, no publicó sus descubrimientos), N. Lobachevsky y J. Bolyai. En estos modelos el axioma de las paralelas (postulado V) deja de ser válido. Los primeros trabajos de Lobachevsky datan de 1826 y sus publicaciones en el tema van de 1830 a 1840. Los trabajos de Bolyai empezaron alrededor de 1823 pero no fueron publicados sino hasta 1832. En 1868, E. Beltrami demostró que la geometría hiperbólica plana no es otra cosa que el estudio de las superfi-

cies simplemente conexas con una métrica completa de curvatura constante negativa. En general, la geometría hiperbólica n -dimensional consiste del estudio de las variedades riemannianas completas y simplemente conexas con curvatura seccional constante y negativa. En este modelo los elementos lineales de la geometría, es decir, los puntos, rectas, planos, ..., etc., son las subvariedades cerradas y totalmente geodésicas. La posibilidad de tal interpretación se debe en gran parte a la teoría de variedades riemannianas iniciada por Riemann. Para una variedad de dimensión n con curvatura seccional constante K , Riemann da la expresión local de la métrica mediante la fórmula siguiente:

$$ds = [1 + \frac{K}{4} [x_1^2 + \dots + x_n^2]]^{-1} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2)^{1/2}.$$

Si se considera el hemisferio superior de la esfera centrada en el origen de \mathbb{R}^{n+1} , de radio $a > 0$,

$$S_+^n(a) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2, x_1 > 0\}$$

con la métrica

$$ds = K(dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2)^{1/2} x_1^{-1}, K > 0,$$

entonces $S_+^n(a)$ tiene curvatura constante negativa y es completa. Este es el modelo de Beltrami.

Si $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ es el disco unitario abierto

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\},$$

con la métrica

$$ds^2 = 4[1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)]^{-2}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

entonces, con esta métrica D^n tiene curvatura seccional negativa y se obtiene otro modelo de la geometría hiperbólica n -dimensional. Este modelo se obtiene del modelo anterior proyectando estereográficamente, desde el polo sur, el hemisferio superior en el disco abierto de \mathbb{R}^n y en la literatura se le conoce como el disco de Poincaré. Recomendando al lector leer los comentarios de John Milnor en su artículo [Mi].

Si M es una superficie de Riemann, el teorema de uniformización implica que la superficie de Riemann \tilde{M} , que recubre universalmente a M es analíticamente equivalente a S^2 , \mathbb{C} ó Δ . Del hecho anterior se sigue que M se obtiene de \tilde{M} al tomar el cociente de M con respecto a la acción del grupo de los automorfismos del recubrimiento, en otras palabras, existe un subgrupo discreto, Γ , de automorfismos (homeomorfismos conformes) de \tilde{M} que actúa propia, libre y discontinuamente en \tilde{M} y M se obtiene de \tilde{M} al identificar como un solo punto a todos los puntos que estén en la misma órbita bajo la acción de Γ . Cuando \tilde{M} es Δ , se sigue del lema de Schwarz que cualquier función conforme y biyectiva de Δ sobre Δ , que preserve la orientación, es una transformación de Moebius T de la forma indicada en la ecuación (2.12) de la próxima sección. Ahí verificaremos directamente que T es una isometría con respecto a la métrica de Poincaré. Como consecuencia, una conclusión que se obtiene del teorema de uniformización es la de que toda superficie de Riemann cuya superficie recubridora universal es Δ tiene una métrica con curvatura constante -1 . Esta relación entre la teoría de la va-

riable compleja, la geometría diferencial y las construcciones geométricas que se apoyan en la geometría hiperbólica, resulta sumamente fructífera.

Dada una superficie topológica, metrizable y orientable M , existe un atlas con el cual M es una superficie de Riemann en el sentido de la variable compleja. Esta última afirmación la cual garantiza la existencia de coordenadas locales isotérmicas es debida originalmente a Gauss, luego en forma más refinada a Korn [Kor], Lichtenstein [Li], y Morrey [Mo]. Una vez más, el teorema de uniformización implica que toda superficie orientable, distinta de S^2 y el toro T^2 , posee una métrica con curvatura constante negativa. En virtud del teorema de Gauss-Bonnet, la única obstrucción para dotar a una superficie compacta y orientable con una métrica de curvatura negativa es su característica de Euler. De ahora en adelante llamaremos a una métrica riemanniana completa con curvatura seccional constante -1 una estructura hiperbólica. Diremos que M es una variedad hiperbólica cuando ésta admita una estructura hiperbólica.

La teoría de las superficies de Riemann demuestra que es posible dar a una misma superficie dos estructuras hiperbólicas sin que necesariamente exista una isometría entre las dos estructuras. Lo anterior es consecuencia del hecho de que dos superficies de Riemann pueden ser homeomorfas sin que necesariamente sean analíticamente equivalentes: existen subgrupos isomorfos Γ y Γ' de isometrías del disco de Poincaré Δ , tales que Γ y Γ' no son conjugados dentro del grupo de isometrías de Δ y tales que actúan propia, libre y discontinuamente en Δ . Esta abundancia de estructuras hiperbólicas en las superficies contrasta con la rigidez que existe en las variedades hiperbólicas de dimensión superior a dos. El teorema de rigidez

de Mostow [M₀] implica que dos variedades hiperbólicas M_1 y M_2 tales que $\dim M_1 = \dim M_2 > 2$, con grupos fundamentales isomorfos y con volúmenes finitos son necesariamente isométricas.

Si M^n es una variedad hiperbólica de la clase que investigaremos más adelante, entonces la variedad que recubre universalmente a M^n es el disco de Poincaré D^n . Existe una proyección de recubrimiento $\pi: D^n \rightarrow M^n$, tal que π es una isometría local. La variedad M^n es isométrica a D^n/Γ , donde Γ es un subgrupo discreto y sin puntos fijos del grupo de isometrías de D^n (siempre se supondrá que D^n tiene la métrica citada anteriormente). De las afirmaciones previas vemos que para que una variedad M posea una estructura hiperbólica es necesario que el espacio recubridor universal sea D^n (que es contractible) y, como consecuencia, es necesario que todos los grupos de homotopía $\pi_i(M)$ sean nulos cuando $i > 1$. El teorema de Mostow puede ser parafraseado de la manera siguiente: supóngase que D^n/Γ_1 , y D^n/Γ_2 son dos variedades hiperbólicas con volúmenes finitos y que Γ_1 y Γ_2 son isomorfos, entonces, si $n > 2$ existe una isometría $\phi: D^n/\Gamma_1 \rightarrow D^n/\Gamma_2$.

El teorema de Mostow nos dice que el grupo $\pi_1(M)$ de una variedad hiperbólica, con volumen finito, determina por completo tanto la topología como la geometría de M cuando la dimensión de M es superior a dos.

Recientemente William P. Thurston ha obtenido resultados profundos sobre la existencia de estructuras hiperbólicas en una clase muy amplia de variedades topológicas de dimensión tres. Las variedades tridimensionales en las cuales Thurston ha encontrado estructuras hiperbólicas satisfacen, en un cierto sentido, las hipótesis mínimas necesarias; por ejemplo, la

variedad debe ser recubierta universalmente por D^3 , el grupo fundamental debe tener centro trivial y no contener subgrupos abelianos libres de rango superior a dos, además, debe satisfacer hipótesis (como la de ser suficientemente grande en el sentido de Waldhausen) que garantizan el poder aplicar métodos de variedades tridimensionales. Puede decirse que los teoremas de Thurston son los análogos, en dimensión tres, de el teorema de uniformización de Koebe y Poincaré. Thurston ha "uniformizado" a una infinidad de variedades y este logro formidable permitirá eventualmente obtener resultados importantes en el estudio de las variedades tridimensionales. Como ejemplo citemos que una clase muy amplia de complementos de nudos y enlaces en S^3 admiten una estructura hiperbólica (en el caso de nudos las únicas excepciones son los nudos de tipo "satélite" y los nudos toroidales), hecho con el cual fué posible demostrar la famosa conjetura de Smith sobre la trivialidad del nudo que constituye el conjunto de puntos fijos de una transformación periódica y diferenciable de S^3 que tenga al menos un punto fijo.

Las notas de Thurston "The Geometry and Topology of 3-Manifolds" publicadas en una versión preliminar por la Universidad de Princeton, contienen una gran cantidad de resultados, ideas e información y son objeto de estudio en seminarios organizados en muchas universidades del mundo. Las notas de Thurston requieren del lector, además de un gran esfuerzo, versatilidad de conocimientos e intuición geométrica, pero el paisaje hiperbólico que nos presenta Thurston es bello y profundo.

Las presentes notas están basadas en los primeros cuatro capítulos de las notas de Thurston y son producto del material que se tuvo que cubrir a

lo largo de un seminario realizado en el Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, en México. Participaron en este seminario mis colegas E. Antoniano, D. Gallo y M. Porter y muchas de las ideas en la presentación del material y contenido de estas notas son debidas a las discusiones y comentarios que se suscitaron durante ese seminario. El último mencionado también ayudó con la preparación del manuscrito final. Quiero expresar aquí mi agradecimiento a mis colegas.

He tratado de hacer un poco más accesible el contenido de los primeros capítulos de las notas de Thurston, expandiendo algunas de las ideas e informaciones que están implícitas en ellas. Al hacer esto, estoy consciente de que nunca la versión de un aprendiz puede igualar a aquella de su maestro, pero si con estas notas logro motivar al lector a estudiar las notas de Thurston, consideraré mi propósito más que satisfecho.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento al Prof. Michael Porter quien hizo una minuciosa revisión de estas notas así como la realización de los dibujos y a la Srta. Verónica Vargas por su excelente trabajo de mecanografía.

2. GEOMETRIA HIPERBOLICA PLANA

Hacia los finales del siglo XIX el método axiomático para fundamentar la geometría alcanzó un punto culminante con el libro, ahora clásico, "Grundlagen der Geometrie" de David Hilbert (publicado en inglés por Open Court Publishing, La Salle, Illinois, 1965, bajo el título "Foundations of Geometry"). Hilbert se basa en conceptos primitivos tales como "punto", "recta" y "plano" y en nociones primitivas que relacionan los conceptos previos, tales como la noción de "incidencia", la noción de que un punto P "quede entre" los puntos distintos A y B en la recta determinada por ellos y la noción de "congruencia" entre parejas de puntos. Con estos conceptos Hilbert establece axiomas sobre los cuales se apoya la geometría euclidiana del espacio. Los postulados de Hilbert para la geometría euclidiana plana se dividen en cinco grupos:

- I. Postulados de Conexión (o de Incidencia)
- II. Postulados de Orden
- III. Postulados de Congruencia
- IV. Postulado de Paralelismo
- V. Postulados de Continuidad.

Aunque no discutiremos aquí los axiomas de Hilbert, sí conviene mencionar que el grupo II permite orientar a cada recta y que una vez elegida una orientación en una recta es posible introducir un orden total en el conjunto de puntos de la misma. Usando todos los grupos de axiomas, con excepción del V grupo, es posible introducir una "álgebra" con los segmentos orientados de la recta, con la cual se obtiene un campo ordenado K .

Los axiomas del grupo V dicen, en esencia, que el campo K tiene un orden arquimidiiano completo y es, por lo tanto, isomorfo al campo de los números reales. Una vez elegida una unidad de medida y usando el concepto de congruencia se puede introducir una métrica (es decir, una noción de distancia en el sentido topológico) en el conjunto de puntos.

Para la geometría n -dimensional, si $n > 3$, se tienen además de las nociones de "punto", "recta" y "plano", nociones de elementos lineales de dimensión k ($3 \leq k \leq n-1$), por ejemplo, existen hiperplanos que son elementos lineales de dimensión $n-1$. También se definen objetos geométricos tales como ángulos, ángulos diédricos, rayos, polígonos, semirectas, etc.

El grupo V en realidad consiste de un solo postulado, el de las paralelas:

V. Por un punto A exterior a la recta m pasa exactamente una recta que no corta a m.

Los axiomas de la geometría elíptica plana se obtienen reemplazando este postulado por el siguiente:

V_1 . Cualquier pareja de rectas distintas ℓ y m se cortan.

Los axiomas de la geometría hiperbólica bidimensional se obtienen reemplazando V por el postulado:

V_2 . Por un punto A exterior a la recta m pasan por lo menos dos rectas distintas que no cortan a m.

Otro punto de vista para desarrollar la geometría, introducido por Sophus Lie, se basa en el concepto de grupo continuo de transformaciones. Este punto de vista tuvo como su mejor abogado a Felix Klein, quien en su "Programa de Erlangen" define Geometría en términos de grupos continuos de

transformaciones (grupos de Lie). Es importante describir, para cada tipo de geometría, el grupo de isometrías (o congruencias) asociado al mismo.

Un teorema clásico en la geometría diferencial, debido a E. Cartan, dice que toda variedad riemanniana, completa, simplemente conexa, de dimensión n y con curvatura seccional constante K , donde $K = 0, 1, -1$, es isométrica a \mathbb{R}^n , S^n o al disco de Poincaré D^n según K sea $0, 1, -1$, respectivamente (\mathbb{R}^n es el espacio euclidiano, con su métrica usual y S^n es la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+1} con la métrica inducida). Como se había mencionado antes, E. Beltrami descubrió que los modelos para las diferentes geometrías no son otra cosa que variedades con curvatura seccional constante. A continuación vamos a seguir este punto de vista aunque, dadas las limitaciones de espacio de estas notas, no nos será posible definir y demostrar todo. Se sugieren como referencias los libros de L. Ahlfors [Ah], L. Santaló [Sa], M. Do Carmo [Do 1] [Do], E. Lima [L 1] [L 2], W. Magnus [Ma] así como los artículos recientes de J. Milnor [Mil] y de N. Wielenberg [Wi]. Naturalmente, la referencia principal es "The Geometry and Topology of 3-Manifolds" de William P. Thurston [Th].

2.1. Geometría Elíptica.

Sea P^n el espacio proyectivo de dimensión n obtenido a partir de la esfera S^n al identificar los puntos diametralmente opuestos y supóngase que dotamos a P^n con la métrica riemanniana m , inducida por la métrica estándar de S^n . Si $\pi: S^n \rightarrow P^n$ es la identificación antipodal, entonces π es una proyección recubridora doble y a la vez es una isometría local, con respecto a la métrica inducida, por lo tanto, la métrica m tiene curvatura

seccional igual a 1. Con la métrica m , P^n es el ámbito de la geometría elíptica n -dimensional. Los puntos de P^n son los puntos de la geometría, las rectas elípticas son las líneas geodésicas de P^n (es decir, las proyecciones en P^n bajo π de los círculos máximos de S^n); los planos y los elementos lineales en general son las subvariedades lineales proyectivas de P^n (en términos de coordenadas homogéneas proyectivas las subvariedades lineales son los subconjuntos de P^n que son ceros comunes de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas), o sea, los subproyectivos de P^n . Se puede verificar (aunque sería tedioso) que todos los axiomas de la geometría elíptica n -dimensional son válidos. El grupo ortogonal $O(n+1)$ es el grupo de isometrías de S^n y cada transformación ortogonal manda a cada pareja de puntos antipodales de S^n en una pareja de puntos antipodales y por lo tanto induce una transformación de P^n que es una isometría. Recíprocamente, cada isometría de P^n se levanta a una transformación ortogonal. De lo anterior se sigue que el grupo de isometrías de P^n (con respecto a la métrica m) es el grupo $PO(n)$ de las transformaciones proyectivas ortogonales. Como grupo de Lie, $PO(n)$ es isomorfo al grupo cociente $O(n+1)/\{I, -I\}$ donde I es la identidad y, $-I$ es la aplicación antipodal. Obviamente existen transformaciones proyectivas que no son isometrías y que permiten transformar configuraciones formadas con elementos lineales en otras configuraciones del mismo tipo (lo que queremos enfatizar es el hecho de que hay colineaciones elípticas que no son isometrías). El grupo $PO(n)$ actúa transitivamente en los elementos lineales de la geometría elíptica n -dimensional: dados dos subproyectivos k -dimensionales existe una transformación ortogonal proyectiva que lleva a uno en el otro. En esta geometría dos elementos lineales

de dimensión complementaria siempre se cortan y todas las rectas tienen longitud finita e igual a π .

2.2. Geometría Euclidiana.

Esta geometría es la que nos es más familiar y perceptualmente más intuitiva: tiene como ámbito al espacio euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , con su métrica usual. Los elementos lineales de esta geometría son los subespacios afines de \mathbb{R}^n . El grupo de isometrías de \mathbb{R}^n es el grupo de las transformaciones afines ortogonales $AO(n)$, es decir, transformaciones $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma

$$T(x) = A(x) + b, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

donde $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal de \mathbb{R}^n . Como en el caso elíptico, el grupo de isometrías de \mathbb{R}^n actúa transitivamente en los elementos lineales de \mathbb{R}^n : dados dos subespacios afines L_1 y L_2 de dimensión k , ($0 \leq k \leq n-1$), existe $T \in AO(n)$ tal que $T(L_1) = L_2$.

En la geometría elíptica una colineación (es decir una transformación que aplique a toda terna de puntos colineales en otra terna de puntos colineales) que preserve ángulos es automáticamente una isometría. Esto no es cierto en la geometría euclidiana, ya que la dilatación $T(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ($\lambda \neq 0$), preserva ángulos pero sólo es isometría cuando $\lambda = \pm 1$. Esta es la razón por la cual no hay una unidad natural para medir las distancias en la geometría euclidiana. En la geometría elíptica una unidad natural sería, por ejemplo, la longitud común de todas las rectas elípticas (equivale a fijar la curvatura $K > 0$).

2.3. Geometría Hiperbólica.

Esta geometría posee varios modelos, cada uno de los cuales tiene ventajas para entender o enfatizar ciertas propiedades. Todos los modelos son isométricos a una n -variedad riemanniana completa simplemente conexa con curvatura negativa $-K$. Tales espacios tienen una unidad natural de medida y es posible escoger la unidad de medida de tal suerte que la curvatura del espacio sea precisamente igual a -1 . A un espacio así normalizado lo llamaremos espacio hiperbólico n -dimensional y lo denotaremos H^n . Los espacios H^2 y H^3 son llamados simplemente plano hiperbólico y espacio hiperbólico, respectivamente.

Empezaremos por definir el modelo de H^2 llamado disco de Poincaré y enunciar algunas de sus propiedades.

2.4. DEFINICION. El disco de Poincaré de dimensión dos es el disco $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, provisto con la métrica riemanniana conforme cuya forma fundamental está dada por:

$$ds^2 = 4(1-x^2-y^2)^{-2}(dx^2+dy^2).$$

Aclaremos primero que quiere decir esta métrica. Dados dos vectores V y W , anclados en el punto $z \in D^2$, el producto escalar $[V,W]_z$, que define a la métrica en el disco de Poincaré coincide con el producto escalar en \mathbb{R}^2 multiplicado por el factor $(1-x^2-y^2)^{-2}$, si $z = (x,y)$. Utilizando la identificación $(x,y) \leftrightarrow x+iy$, de \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} y usando notación de los números complejos, la métrica viene dada por la fórmula:

$$(2.5) \quad ds^2 = 4(1-|z|^2)^{-2}|dz|^2; \quad |z| < 1.$$

En lo futuro pasaremos libremente de \mathbb{R}^2 a \mathbb{C} vía la identificación mencionada.

Si $c:[a,b] \rightarrow D^2$ es una curva diferenciable, entonces por definición la longitud hiperbólica de c , denotada $\ell(c)$ está dada por la fórmula

$$(2.6) \quad \ell(c) = \int_c 2(1-|c(t)|^2)^{-1}|dz| = \int_a^b 2(1-|c(t)|^2)^{-1}|\dot{c}(t)|dt,$$

donde $\dot{c}(t)$ es la derivada de la cantidad compleja $c(t)$ con respecto a t .

En general si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región del plano complejo y si $\rho:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva y de clase C^∞ , entonces una métrica del tipo siguiente:

$$(2.7) \quad ds^2 = [\rho(z)]^2|dz|^2; \quad z \in \Omega,$$

se llama una métrica conforme. Ya que el ángulo α entre dos vectores v, w anclados en $z \in \Omega$ con respecto a una métrica arbitraria $Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2$ es dado por $[v \cdot w] = \|v\| \|w\| \cos \alpha$ donde $[v \cdot w] = Ev_1w_1 + F(v_1w_2 + v_2w_1) + Gv_2w_2$ y $\|v\| = (v \cdot v)^{1/2}$, se sigue que el ángulo que forman dos vectores con respecto a la métrica conforme coincide con el ángulo euclidiano. Las longitudes de las curvas, sin embargo, son distorsionadas debido a la presencia del factor ρ de proporcionalidad. La curvatura gaussiana de la métrica (2.7) es una función $K:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que, para la métrica (2.7) está dada por una fórmula muy simple:

$$(2.8) \quad K(z) = -[\rho(z)]^{-2}(\Delta(\log \rho)(z)),$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el laplaciano. La demostración de (2.8) es un cálculo directo usando el hecho de que las curvas coordenadas $x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$, son mutuamente ortogonales con respecto a la métrica (2.7) y por lo tanto con respecto a estas curvas los símbolos de Christoffel se expresan en términos simples de las primeras derivadas parciales de $\log \rho$ (ver Lemma 4.2.4, pág. 77 del libro de Klingenberg [Kli]).

Si aplicamos la fórmula (2.8) a la métrica conforme (2.5) del disco D^2 obtenemos la siguiente:

2.9. PROPOSICION. El disco D^2 con la métrica (2.5) tiene curvatura constante igual a -1.

2.10. Grupo de isometrías de D^2 .

Considérese una transformación de Moebius

$$(2.11) \quad T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

definida en el plano complejo extendido y tal que a y b son números complejos que satisfacen $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Una tal transformación aplica conformemente a D^2 sobre él mismo. La transformación T puede también ser escrita de la forma

$$(2.12) \quad T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

donde θ es un número real y a es un número complejo tal que $|a| < 1$ (la

barra indica conjugación compleja).

2.13. PROPOSICION. Una función $F: D^2 \rightarrow D^2$ es una isometría del disco de Poincaré, que preserva la orientación, si y solo si F es una transformación de Moebius del tipo (2.12). En particular, las rotaciones $T(z) = e^{i\theta}z$ son isometrías hiperbólicas.

DEMOSTRACION. Sea $T = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ y sean z_1, z_2 dos puntos de D^2 . Un cálculo muy sencillo implica la siguiente igualdad:

$$(2.14) \quad \left| \frac{T(z_1) - T(z_2)}{1 - \overline{T(z_1)}T(z_2)} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

La igualdad (2.14) nos dice que la función

$$\delta: \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta,$$

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}$$

es invariante bajo transformaciones del tipo (2.12). Ahora bien, si $\gamma: (-1, 1) \rightarrow \Delta$ es una curva diferenciable tenemos

$$\frac{1}{t} \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{1 - \overline{\gamma(t)}\gamma(0)} \right| = \frac{1}{t} \left| \frac{T(\gamma(t)) - T(\gamma(0))}{1 - \overline{T(\gamma(t))}T(\gamma(0))} \right|.$$

Tomando límites cuando $t \rightarrow 0$ se tiene

$$(*) \quad \frac{|\dot{\gamma}(0)|}{1-|\gamma(0)|^2} = \frac{|(T \circ \gamma)'(0)|}{1-|T(\gamma(0))|^2}.$$

La igualdad (*) nos dice que T preserva la norma, con respecto a la métrica (2.5), de los vectores tangentes a curvas y esto, a su vez, implica que T es una isometría en el sentido de la geometría diferencial. Recíprocamente, supóngase que $F: D^2 \rightarrow D^2$ es una isometría (en el sentido de la geometría diferencial). Entonces, F es diferenciable y preserva una métrica conforme y por lo tanto preserva ángulos euclidianos. Se sigue que F debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, F es una función analítica de D^2 sobre D^2 . El lema de Schwarz implica que F es de la forma (2.12) (Q.E.D.).

NOTACION. Sea $I(D^2)$ el grupo de isometrías hiperbólicas que preservan la orientación de D^2 .

2.15. DEFINICION. Si M es una variedad riemanniana decimos que un subconjunto $L \subseteq M$ es una línea geodésica si L es la imagen de una curva geodésica $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, parametrizada por su longitud de arco y tal que el intervalo (a,b) es maximal con respecto a estas propiedades (aquí se permite que $a = -\infty$ ó que $b = \infty$).

Si $\gamma: [0,1] \rightarrow D^2$ es una curva regular tal que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = z \neq 0$, entonces la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta},$$

donde $z = re^{i\theta}$, tiene longitud hiperbólica que no excede a la longitud hiperbólica de γ . De esto concluimos que las geodésicas que parten del origen son curvas radiales y por lo tanto las líneas geodésicas que contienen al origen son de la forma $L \cap D^2$, donde L es una recta que pasa por el origen.

2.16. DEFINICION. El haz tangente unitario sobre D^2 consiste del conjunto de todos los vectores tangentes a D^2 , que tienen norma hiperbólica uno. Escribiremos $\tau_1(D^2)$ para denotar a este haz. Sea $p: \tau_1(D^2) \rightarrow D^2$ la proyección canónica.

Si $T \in I(D^2)$, entonces su derivada, \dot{T} , aplica difeomorficamente $\tau_1(D^2)$ sobre $\tau_1(D^2)$ y se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tau_1(D^2) & \xrightarrow{\dot{T}} & \tau_1(D^2) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ D^2 & \xrightarrow{T} & D^2 \end{array}$$

Por la regla de la cadena tenemos que si $T = T_2 \circ T_1$, entonces $\dot{T} = \dot{T}_2 \circ \dot{T}_1$, por lo tanto, vía diferenciales, la acción de $I(D^2)$ sobre D^2 se levanta a una acción sobre $\tau_1(D^2)$.

2.17. PROPOSICION. El grupo $I(D^2)$ actúa transitivamente en D^2 y las diferenciales de los elementos de $I(D^2)$ actúan transitivamente en $\tau_1(D^2)$.

DEMOSTRACION. La demostración es prácticamente evidente: si T es de la forma (2.12) entonces $T(a) = 0$, luego, se puede transformar cualquier punto a de D^2 en el origen. Por el otro lado, ya que θ es el argumento de la derivada de T en 0 , variando θ vemos que cualquier vector unitario tangente en a puede ser enviado en cualquier vector tangente a D^2 en 0 . De esto se siguen las propiedades transitivas de $I(D^2)$ (Q.E.D.).

2.18. COROLARIO. $I(D^2)$ actúa transitivamente en el conjunto de las líneas geodésicas y por lo tanto las líneas geodésicas son los círculos ortogonales al círculo unitario $S^1 = \partial D^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ (con más precisión: las líneas geodésicas son la parte de dichos círculos que está contenida en D^2).

DEMOSTRACION. Obviamente una isometría manda a una línea geodésica en otra línea geodésica, y una línea geodésica queda completamente determinada por uno de sus puntos y un vector tangente en dicho punto. Ahora bien, las transformaciones de Moebius mandan círculos en círculos o rectas, y son isogonales (es decir, preservan ángulos entre curvas). Las rectas que pasan por el origen son perpendiculares a S^1 y por 2.17 toda geodésica es la imagen por una isometría de una geodésica que pasa por el origen. El corolario entonces queda demostrado si consideramos a las rectas euclidianas como un tipo especial de circunferencias (de radio infinito, si se quiere). Nos apegaremos a esta terminología cuando sea conveniente en estas notas.

Sea $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el plano complejo extendido. Identifiquemos en la manera usual a $\hat{\mathbb{C}}$ con la esfera S^2 mediante proyección estereográfica en la que ∞

corresponde al polo norte. Sea $J(z) = (\bar{z})^{-1}$ (con la convención usual $J(0) = \infty, J(\infty) = 0$). La función J es la inversión con respecto a S^1 . Si z, w , son dos puntos distintos de D^2 , entonces la circunferencia que pasa por los tres puntos z, w y $J(z)$ pasa también por $J(w)$ y es invariante bajo J . Sea $S(z, w)$ tal circunferencia. Ya que J deja invariante a S^1 y a $S(z, w)$ y preserva ángulos, se sigue que $S(z, w)$ es ortogonal a S^1 y $S(z, w)$ es de hecho la única circunferencia que contiene a z y w y que es ortogonal a S^1 .

Recordemos que si z es un punto de D^2 diferente del origen, entonces $z^* = J(z)$ se construye fácilmente con regla y compás. Si P_1 y P_2 son los extremos de la cuerda de S^1 que es perpendicular al radio que pasa por z , entonces z^* es el punto donde se cortan las rectas tangentes a S^1 que pasan, respectivamente, por P_1 y P_2 (ver Figura 1).

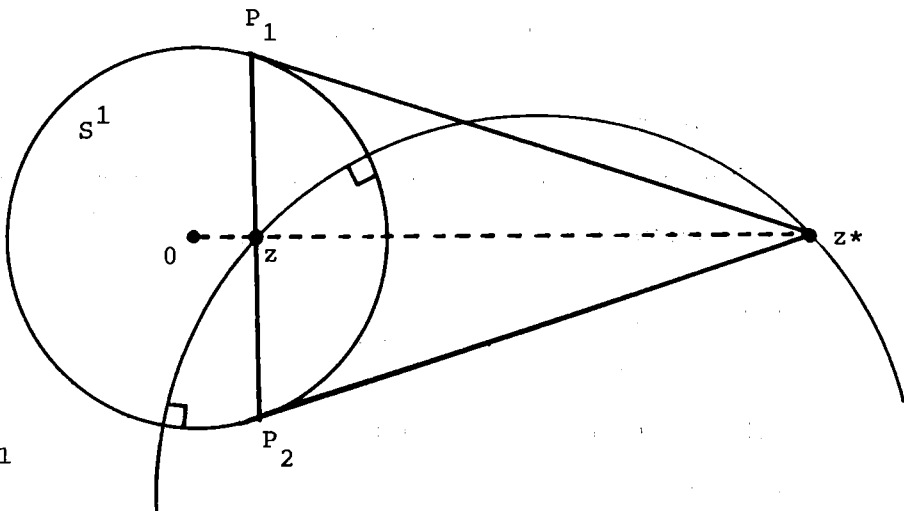


Fig. 1

Pareja de puntos inversos y un círculo ortogonal a S^1 .

Sean $z, w \in D^2$ puntos distintos y sea $L(z, w) = S(z, w) \cap D^2$; $L(z, w)$ es un arco de circunferencia que es ortogonal a S^1 .

Ahora tenemos el modelo del disco de Poincaré de la geometría plana no euclidiana: un punto no euclidiano es un punto de D^2 y una recta no euclidiana es un arco del tipo $L(a,b)$, es decir, la parte común con D^2 de las circunferencias ortogonales a ∂D^2 (ver Figura 2).

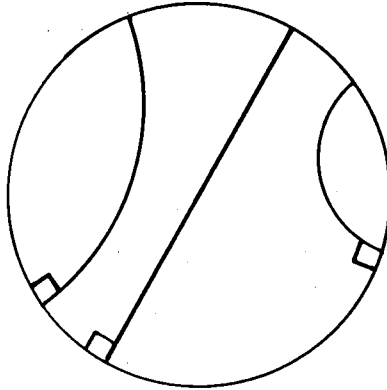


Fig. 2

Rectas no euclidianas

2.19. Distancia Hiperbólica.

Por definición la distancia hiperbólica o no euclidiana de dos puntos $z, w \in D^2$, escrita $d(z, w)$, se define mediante la fórmula:

$$(2.20) \quad d(z, w) = \inf_{\gamma \in \Omega} \ell(\gamma),$$

donde Ω es el conjunto de curvas diferenciables $\gamma: [a, b] \rightarrow D^2$, tales que $\gamma(a) = z$, $\gamma(b) = w$.

Si $r \in D^2$ es un punto en el eje real, entonces el ínfimo (2.20) que define a $d(0, r)$ se alcanza con un arco geodésico cuya imagen debe estar contenida en el eje real, luego, la distancia $d(0, r)$ está dada por la fórmula

$$(2.21) \quad d(0,r) = \int_0^r \frac{2dt}{1-t^2} = \log \frac{1+r}{1-r} .$$

Con la fórmula (2.21) podemos calcular fácilmente la distancia hiperbólica entre cualquier pareja de puntos z_1, z_2 . Sea T la isometría de D^2 definida así:

$$T(z) = K \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z} ,$$

donde

$$K = \frac{|z_2-z_1|}{|1-z_1 z_2|} \frac{(1-\bar{z}_1 z_2)}{(z_2-z_1)} .$$

Se tiene $|K| = 1$, luego T es efectivamente de la forma (2.12). La transformación T envía a z_1 en el origen y a z_2 en el punto real t ,

$$t = \frac{|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1 z_2|} ,$$

por lo tanto,

$$(2.22) \quad d(z_1, z_2) = \log \frac{1+t}{1-t} .$$

Recordemos que la expresión,

$$(2.23) \quad R(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

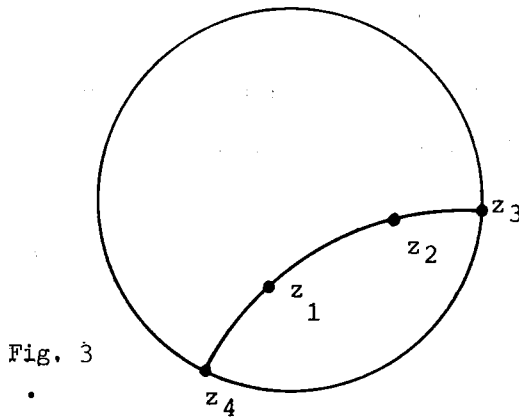
es la razón doble de la cuaterna ordenada (z_1, z_2, z_3, z_4) . Si $T: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ es una transformación de Moebius arbitraria, entonces

$$(2.24) \quad R(z_1, z_2, z_3, z_4) = R(T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)),$$

es decir, toda transformación de Moebius preserva la razón doble. Otra manera de escribir la fórmula (2.22) es la siguiente:

$$(2.25) \quad d(z_1, z_2) = \log R(z_1, z_2; z_3, z_4),$$

donde z_3 y z_4 son los puntos donde $S(z_1, z_2)$ corta a S^1 (se supone que $z_1 \neq z_2$) y los índices se escogen de tal forma que los puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 estén ordenados cíclicamente en $S(z_1, z_2)$ (ver Figura 3). La fórmula tiene sentido puesto que $R(z_1, z_2; z_3, z_4)$ es real y positivo.



La fórmula (2.25) puede tomarse como una segunda definición de la distancia hiperbólica. Usando esta fórmula y la invariancia de la razón doble bajo transformaciones de Moebius se puede redemostrar que las isometrías de D^2 son del tipo (2.12).

Hemos definido la distancia hiperbólica a la manera de la geometría diferencial, tomando el infimum de las longitudes de las curvas rectificables

que conectan dos puntos (en realidad usamos curvas diferenciables pero esto da la misma distancia), por lo tanto la distancia así definida satisface los axiomas de distancia en el sentido topológico, en particular, la desigualdad del triángulo. Se puede demostrar directamente que la distancia hiperbólica definida mediante la fórmula (2.25) satisface la desigualdad del triángulo y que el espacio métrico obtenido es completo. El teorema de Hopf-Rinow implica que una variedad riemanniana es completa si y solo si toda geodésica se puede prolongar para tener como dominio a todo \mathbb{R} . Esta propiedad la verificaremos a continuación.

Si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow D^2$ es la curva

$$(2.26) \quad \gamma(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} = \tanh\left(\frac{t}{2}\right),$$

Se tiene,

$$(2.27) \quad 2\dot{\gamma}(t) = \frac{2e^t}{(e^t + 1)^2} = 1 - [\gamma(t)]^2.$$

La imagen de γ es el intervalo real $(-1, 1)$ y este intervalo es una línea geodésica. Puesto que la ecuación (2.27) implica que los vectores tangentes a lo largo de γ tienen norma hiperbólica igual a uno, se sigue que γ es una geodésica parametrizada por longitud de arco.

Una vez teniendo la geodésica (2.26) podemos encontrar la ecuación de cualquier geodésica: cualquier geodésica es de la forma

$$(2.28) \quad g(t) = T(\gamma(ct)),$$

donde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $T \in I(D^2)$. Explícitamente, si $z_0 \in D^2$ y V es un vector tangente a D^2 en z_0 cuyo argumento es θ_0 y cuya norma hiperbólica es $c > 0$,

entonces la única geodésica, γ_V , cuyo vector tangente en cero es V , tiene por ecuación (2.28), cuando T es

$$(2.29) \quad T(z) = e^{i\theta_0} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

2.30. DEFINICION. Sea $\tau(D^2)$ el haz tangente a D^2 y sea $\tau_{z_0}(D^2)$ el plano tangente a D^2 en el punto $z_0 \in D^2$. La aplicación exponencial $E: \tau(D^2) \rightarrow D^2$ es la función definida así:

$$E(v) = \gamma_V(1).$$

La restricción de E a $\tau_{z_0}(D^2)$ la escribiremos $E_{z_0}: \tau_{z_0}(D^2) \rightarrow D^2$ y se llama la exponencial en el punto z_0 .

Como tenemos una expresión explícita de E_z , usando las fórmulas (2.28) y (2.29), se puede ver fácilmente que $E_{z_0}: \tau_{z_0}(D^2) \rightarrow D^2$ es un difeomorfismo:

2.31. PROPOSICION. La aplicación exponencial E_{z_0} es un difeomorfismo para todo $z_0 \in D$. Además, la diferencial de E_{z_0} en el punto z_0 es la identidad.

La proposición 2.31 es característica de las variedades riemannianas, completas, simplemente conexas con curvatura seccional negativa (no necesariamente constante). Esto es un teorema de E. Cartan (ver J. Milnor "Morse Theory", Princeton University Press, Theorem 19.2, pág. 102).

2.32. COROLARIO. El disco de Poincaré D^2 es un espacio métrico completo, con respecto a la distancia hiperbólica.

Ya que la función exponencial está definida en todo el haz tangente, D^2 es geodésicamente completo, luego, como corolario al teorema de Hopf-Rinow se tiene que D^2 es completo como espacio métrico (ver Corollary 10.10 del libro de Milnor).

En realidad no se necesita apelar al teorema de Hopf-Rinow, de hecho, si $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica hiperbólica entonces por (2.22)

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{|z_n - z_m|}{|1 - \bar{z}_n z_m|} = 0.$$

Ya que el denominador $|1 - \bar{z}_n z_m|$ es menor que 2, $\lim |z_n - z_m| = 0$, y la sucesión es de Cauchy con respecto a la métrica euclídeana, convergiendo por lo tanto a algún punto z^* . De nuevo por (2.22) tenemos

$$|z_n| = (e^{d(0,z_n)} - 1)(e^{d(0,z_n)} + 1)^{-1},$$

mientras por la hipótesis original hay un índice N tal que $d(z_N, z_n) < 1$ cuando $n \geq N$. Luego $d(0, z_n) < d(0, z_N) + 1$, y vemos que es imposible que $|z_n| \rightarrow 1$. Hemos probado que $z^* \in D^2$, y es fácil demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, z^*) = 0.$$

2.33. COROLARIO. Dos puntos distintos z, w están conectados por una única geodésica parametrizada por longitud de arco (salvo desde luego por un cambio de parámetro de la forma $t \rightarrow t+c$).

Ya habíamos observado que dos puntos distintos de D^2 están contenidos

en una única recta hiperbólica y esto implica el corolario.

Dados puntos distintos z_1 y z_2 de $S^1 = \partial D^2$ existe un único círculo ortogonal a S^1 que pasa por z_1 y z_2 (es el círculo que pasa, además, por $J(z_1)$ y $J(z_2)$). Este círculo determina una recta no euclidiana a la que también llamaremos $L(z_1, z_2)$. Los puntos z_1 y z_2 se llaman los puntos impropios de la recta o los puntos al infinito de la recta. Si L_1 y L_2 son dos rectas hiperbólicas, existen tres posiciones relativas según (1) L_1 y L_2 se corten en D^2 ; (2) no se corten en D^2 pero tengan un punto al infinito común; o bien (3) no se corten en D^2 ni tengan algún punto al infinito común. Esta tricotomía caracteriza a la geometría no euclidiana plana y nos dice que por un punto externo a una recta existen dos clases de paralelas a la recta que pasan por el punto externo: aquellas que sin cortar a la recta son, sin embargo, asintóticas a ella y aquellas que están a distancia positiva de la recta.

2.34. DEFINICION. Sean L_1 y L_2 dos rectas hiperbólicas. Se dice que L_1 y L_2 son paralelas si tienen un punto común al infinito. Se dice que L_1 y L_2 son ultraparalelas si no se cortan en D^2 y si no tienen punto al infinito común (ver Figura 4).

Notemos que en la definición (2.34) se utilizaron propiedades del modelo en cuestión, concretamente, realizamos los puntos al infinito como puntos de la circunferencia S^1 . Es posible introducir la noción de punto al infinito de una recta de manera intrínseca, y esto lo haremos ahora.

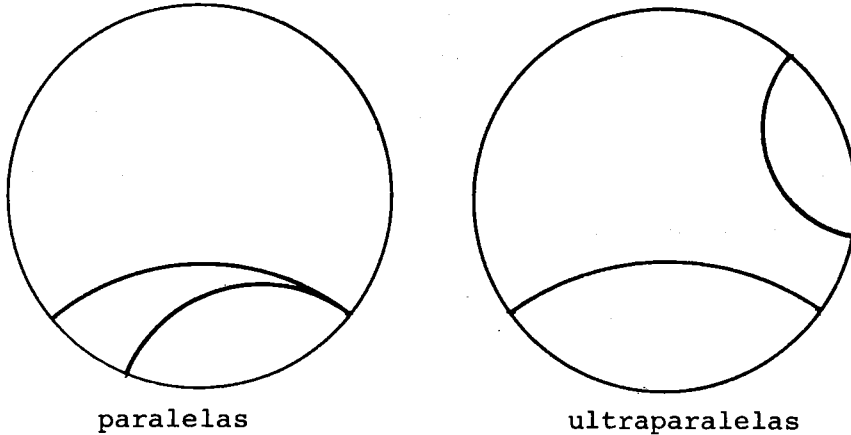


Fig. 4

2.35. DEFINICION. Dos geodésicas $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son positivamente asintóticas si existen t_1 y t_2 en \mathbb{R} y constantes c_1, c_2 positivas tales que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma_1(c_1 t + t_1), \gamma_2(c_2 t + t_2)) = 0.$$

Si en la definición se toma el límite cuando $t \rightarrow -\infty$ entonces decimos que γ_1 y γ_2 son negativamente asintóticas.

La relación de ser positivamente asintótica es una relación de equivalencia entre las geodésicas. Intuitivamente, una clase de equivalencia consiste de geodésicas que convergen al mismo punto del "horizonte". Se puede definir un punto al infinito como una tal clase de equivalencia. Tal definición es intrínseca.

Dados una recta hiperbólica L , que es la imagen de la geodésica $\gamma(t)$, y un punto P externo a L , existen exactamente dos rectas paralelas a L que pasan por P . En el modelo D^2 esto es muy claro: Si $z_1, z_2 \in S^1$ son los pun-

tos al infinito de la recta $L(z_1, z_2)$ y si $z \in D^2$ es un punto externo a la recta, entonces las circunferencias que contienen, respectivamente a las ternas $(z_1, z, J(z))$ y $(z_2, z, J(z))$ son ortogonales a S^1 y determinan rectas que pasan por z y que son paralelas a $L(z_1, z_2)$ (ver Figura 5). Estas dos rectas son constructibles con regla y compás.

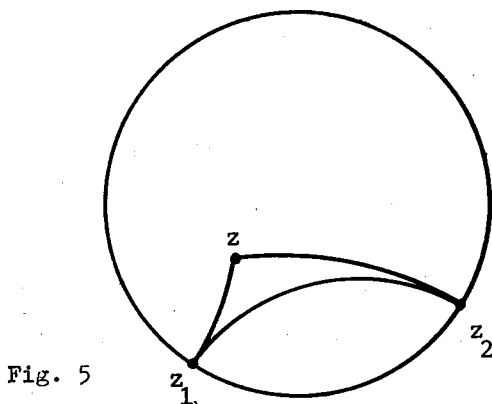


Fig. 5

Las dos paralelas que se mencionan en el párrafo anterior se pueden construir intrínsecamente usando el siguiente:

2.36. LEMA. Sea $\dot{\gamma}(t)$ una geodésica parametrizada por su longitud de arco y que no contiene a z en su imagen. Sea para cada $u \in \mathbb{R}$, $\gamma_u(t)$ la geodésica que empieza en z y que pasa por $\gamma(u)$. Sea $V(u) = \dot{\gamma}_u(0)$ el vector tangente a γ_u en z y supóngase que cada γ_u está parametrizada con su longitud de arco. Entonces existen los límites

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} V(u) = V_{\pm},$$

y los vectores V_+ y V_- determinan a las únicas geodésicas que son asintóti-

cas a γ (ver la Figura esquemática 6).

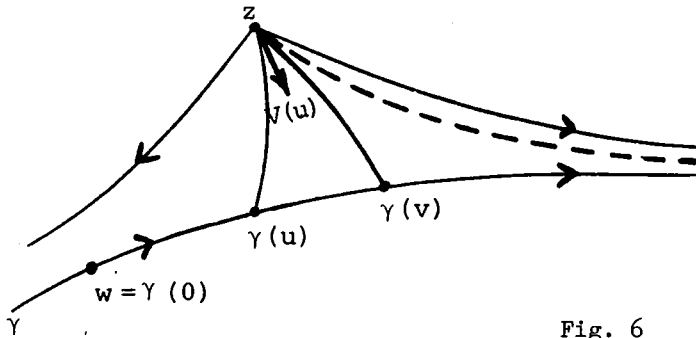


Fig. 6

DEMOSTRACION. Para cada $u, v \in \mathbb{R}$ considere el triángulo hiperbólico que tiene como vértices a los puntos z , $\gamma(u)$ y $\gamma(v)$. Sean $A(u, v)$, $B(u)$ y $C(v)$ los ángulos internos del triángulo, en los vértices z , $\gamma(u)$ y $\gamma(v)$, respectivamente. Sean $a(u, v)$, $b(v)$ y $c(u)$ las longitudes de los lados opuestos a A , B y C , respectivamente (Figura 7). Evidentemente, tenemos $a(u, v) = |u - v|$. Tenemos la siguiente desigualdad que proviene de la trigonometría hiperbólica y que será demostrada posteriormente:

$$(2.37) \quad b^2(v) - c^2(u) - |u - v|^2 \leq 2b(v)c(u)\cos A(u, v).$$

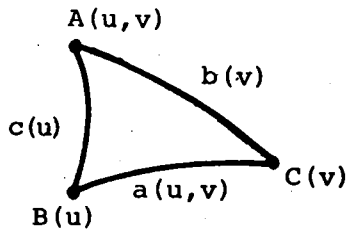


Fig. 7

Si se aplica la desigualdad del triángulo a los puntos $w = \gamma(0)$, z y $\gamma(u)$, se obtiene

$$c(u) \leq |u| + d(z, w).$$

Usando un razonamiento análogo obtenemos

$$b(v) \leq |v| + d(z, w).$$

Estas dos desigualdades así como la desigualdad (2.37) implica que

$$(2.38) \quad \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} \cos A(u, v) = 1$$

Por lo tanto, existe

$$\lim_{u \rightarrow \infty} V(u) = V_+$$

La demostración de la existencia de V_- es análoga. El lector puede verificar las propiedades de unicidad. (Q.E.D.)

En el lema anterior el ángulo entre las direcciones asintóticas V_+ y V_- siempre es menor que π , a menos que z pertenezca a la recta L . Esta propiedad nos da otra diferencia con la geometría euclidiana. Un observador hiperbólico bidimensional situado en D^2 movería su cabeza un ángulo estrictamente inferior a π para observar a todos los puntos de una recta.

Algunas propiedades de la geometría euclidiana siguen siendo válidas en la geometría hiperbólica (de hecho, todas las conclusiones que se pueden deducir lógicamente sin el uso del Postulado de Paralelismo). Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano hiperbólico que equidistan de dos puntos distintos z, w , es la recta hiperbólica que bisecta al segmento hiperbólico determinado por z, w y que es perpendicular a dicho segmento.

Dicha recta también se llama la mediatriz del segmento. Si denotamos con $[z,w]$ el segmento determinado por los puntos z, w y si P es el punto en este segmento que equidista de z y w , entonces mediante una isometría se puede llevar P al origen. Efectuando una rotación en el origen el segmento $[z,w]$ se puede transportar isométricamente en el segmento, $[a_i - a_i]$, del eje imaginario. Ya que la conjugación $H(z) = \bar{z}$ (aunque no preserva orientación) es una isometría hiperbólica, se sigue que la recta $(-1,1) \subseteq D^2$ es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de a_i y a_i y también es la mediatriz de dicho segmento.

En la geometría hiperbólica también sigue siendo cierto que las rectas notables de un triángulo son concurrentes: las mediatrices, las bisectrices interiores, las alturas y las medianas de un triángulo hiperbólico son ternas de rectas hiperbólicas concurrentes. En general los tres puntos donde concurren las alturas, las medianas y las mediatrices, no son colineales en la geometría hiperbólica (a menos de que el triángulo sea isósceles), lo que demuestra que la recta de Euler en geometría euclidiana debe su existencia al axioma de las paralelas.

2.39. PROPOSICION. Dado $z \in D^2$ y la recta hiperbólica L existe una y sólo una recta que pasa por z y que es perpendicular a z .

DEMOSTRACION. La propiedad que queremos demostrar es invariante bajo isometrías. Sea T una isometría que transporta a z al origen. Si $T(L)$ contiene al origen entonces $T(L)$ es un diámetro euclidiano de D^2 , menos sus extremos; y sólo hay una recta hiperbólica ortogonal a $T(L)$ que pasa por el

origen. Si $T(L)$ no contiene al origen, entonces $T(L)$ es un arco de una circunferencia S del plano con centro $a \neq 0$. La única "circunferencia" euclidiana ℓ que pasa por el origen y es ortogonal a S es la recta euclidiana que pasa por a y 0 . Por lo tanto la única recta hiperbólica que pasa por 0 y es ortogonal a $T(L)$ es $\ell \subseteq D^2$. (Q.E.D.)

2.40. PROPOSICION. La distancia hiperbólica del punto z a la recta hiperbólica L es igual a la distancia de z al pié de la perpendicular de z a L .

DEMOSTRACION. Sin perder generalidad se puede suponer que z es el origen. Si L contiene al origen no hay nada que demostrar. La distancia del origen a un punto $w \in D^2$ es

$$(2.41) \quad d(0,w) = \log \frac{1+|w|}{1-|w|}$$

Recuérdese que si $S \subseteq D^2$ es un subconjunto, entonces $d(0,S)$ es por definición la cantidad

$$d(0,S) = \inf_{w \in S} d(0,w).$$

Si $|w_1| \leq |w_2|$ entonces

$$\frac{1+|w_1|}{1-|w_1|} \leq \frac{1+|w_2|}{1-|w_2|},$$

luego,

$$d(0,S) = \log \frac{1+c}{1-c}$$

donde

$$c = \inf_{w \in S} |w|.$$

Por lo tanto,

$$d(0,L) = \inf_{w \in L} |w|.$$

Geoméricamente la demostración de 2.40 ahora es muy clara: existe un único punto $P \in L$ tal que $d(0,L) = d(0,P)$; P es el punto donde el segmento euclidiano que une a P con el centro de la circunferencia que determina a L corta a L (ver Figura 8). El punto P es el pié de la perpendicular hiperbólica de 0 a L . (Q.E.D.)

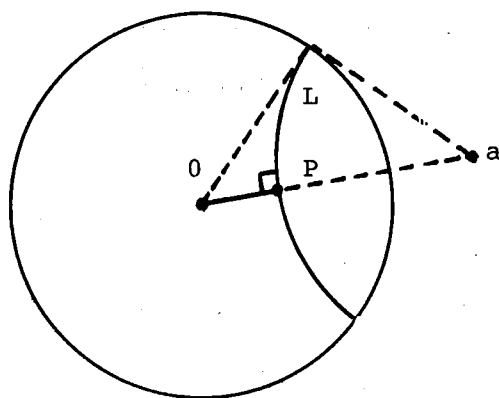


Fig. 8

2.42. Discos y Circunferencias no euclidianas.

Si $z \in D^2$ y $r \geq 0$, entonces la circunferencia no euclidiana centrada en z y de radio r , designada con el símbolo $S_r(z)$ es el lugar geométrico de los puntos de D^2 cuya distancia hiperbólica a z es r . Usando la fórmula (2.41) vemos que

$$S_r(0) = \left\{ z \in D^2; z = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} \right\},$$

es decir, $S_r(0)$ es una circunferencia euclidiana centrada en el origen y de radio euclidiano

$$R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}.$$

Tenemos que la familia $\{S_r(0)\}_{r \geq 0}$ es el conjunto de círculos centrados en el origen y contenidos en D^2 . Las líneas geodésicas que pasan por el origen son ortogonales a esta familia. Si $T \in I(D^2)$ entonces $S_r(T(z)) = T(S_r(z))$, por lo tanto, si $T(0) = z$, tenemos $S_r(z) = T(S_r(0))$. Puesto que T preserva círculos y ángulos tenemos:

2.43. PROPOSICION. Para cada $z \in D^2$ y cada $t > 0$, $S_r(z)$ es un círculo euclidiano. La familia $\{S_r(z)\}_{r \geq 0}$ es ortogonal a las líneas geodésicas que pasan por z (ver Figura 9).

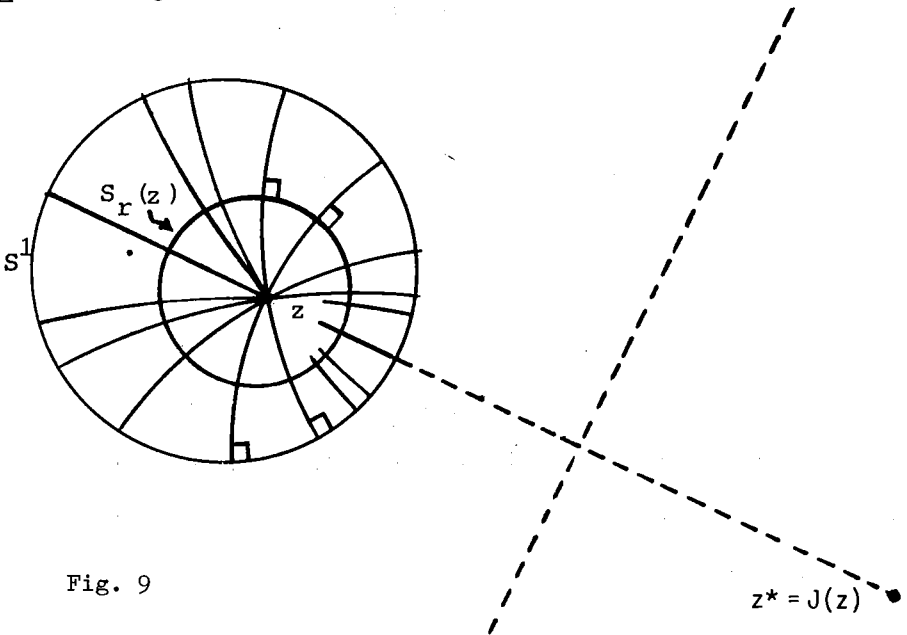


Fig. 9

Nótese que aunque $S_r(z)$ es un círculo euclidiano su centro y su radio euclidianos no son necesariamente z ni r , respectivamente. La familia $\{S_r(z)\}_{r \geq 0}$ es la parte en D^2 del haz de los círculos de Apolonio con vértices z y $z^* = J(z)$.

$S_r(z)$ consiste de los puntos $w \in D^2$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{|w-z|}{|1-\bar{z}w|} = \frac{e^r-1}{e^r+1}.$$

El disco abierto hiperbólico, centrado en z y de radio r , denotado $D_r(z)$ es el conjunto de puntos cuya distancia hiperbólica a z es menor que r , es decir,

$$D_r(z) = \left\{ w \in D^2; \frac{|w-z|}{|1-\bar{z}w|} < \frac{e^r-1}{e^r+1} \right\}$$

$D_r(z)$ tiene como frontera a $S_r(z)$ y es un disco euclidiano de \mathbb{C} cuyo centro no es necesariamente z (ni su radio necesariamente r).

Cuando $\{z_n\}$ es una sucesión de D^2 y $\{r_n\}$ es una sucesión de reales no negativos tales que $\{z_n\}$ tiende a un punto $z_0 \in \partial D^2$ y $r_n \rightarrow \infty$ y tales que la sucesión

$$\frac{1-|z_n|}{|1-r_n|}$$

converja a un real positivo, entonces $\{S_{r_n}(z_n)\}$ es una sucesión de círculos que converge a un círculo tangente a ∂D^2 e interior a ∂D^2 (ver Figura 10). Tales círculos se llaman oriciclos y juegan un papel importante en la geometría hiperbólica. Se puede decir que los oriciclos son circunferencias

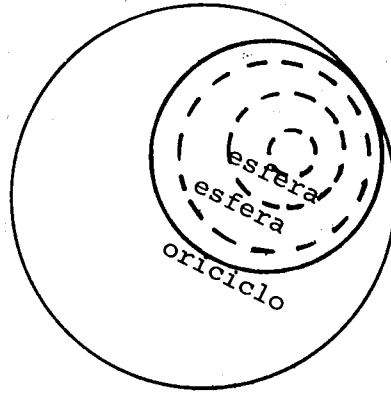


Fig. 10

no euclidianas de radio infinito y con centro al infinito. Una definición intrínseca y más precisa es la siguiente:

2.44. DEFINICION. Un oríciclo es una curva que corta ortogonalmente a todas las geodésicas de una clase de equivalencia de geodésicas positivamente asintóticas (ver Figura 11).

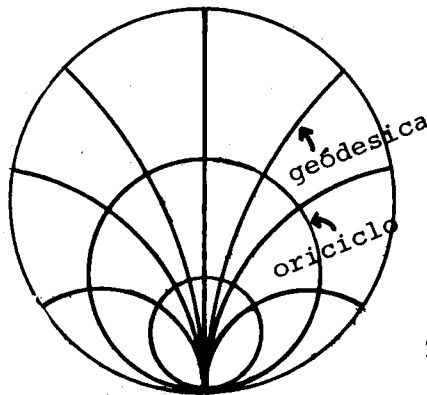


Fig. 11

Las isometrías de D^2 actúan transitivamente en el conjunto de oríciclos. El subgrupo de las isometrías que fijan a un oríciclo h actúa transitivamente en este oríciclo. Dado un vector tangente unitario $V \in \tau_1(D_2)$ existe

un y sólo un oriciclo tangente a este vector.

2.45. Modelo del hemiplano superior.

Sea $H^2 \subset \mathbb{R}^2$ el hemiplano superior:

$$H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}.$$

Démosle a H^2 la métrica

$$(2.46) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

H^2 con la métrica (2.46) es geodésicamente completo y tiene curvatura constante -1 . El modelo se llama hemiplano de Poincaré y es muy útil para efectuar ciertos cálculos en geometría hiperbólica. La transformación de Moebius

$$(2.47) \quad T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

aplica conformemente H^2 sobre D^2 y aún más, T es una isometría. Por esta razón, H^2 es completo y tiene curvatura constante -1 . La métrica en H^2 es también una métrica conforme.

En lo que sigue escribiremos simplemente H en lugar de H^2 .

Como la transformación T lleva geodésicas en geodésicas, círculos en círculos y preserva ángulos, tenemos la siguiente:

2.48. PROPOSICION. Las líneas geodésicas en el modelo H son los círculos ortogonales al eje real (como siempre, consideramos las rectas perpendiculares al eje real como círculos) (Figura 12).

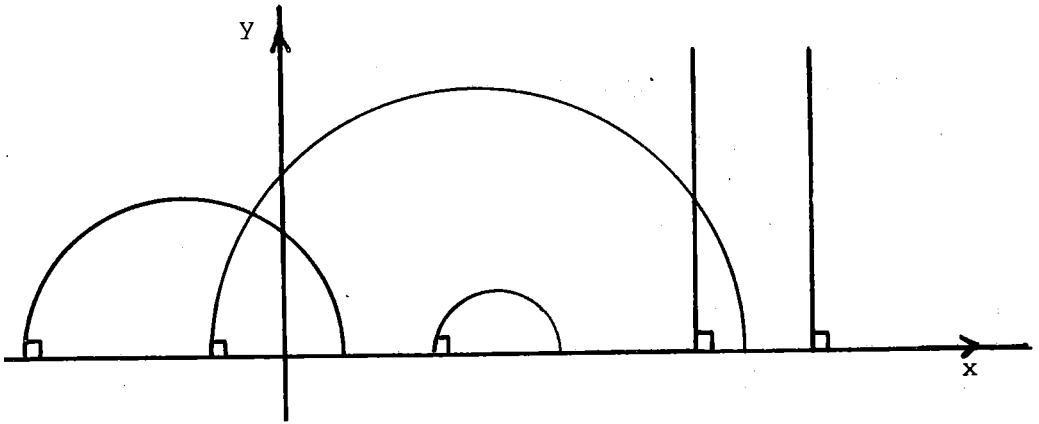
Geodésicas en \mathcal{H}^2

Fig. 12

Usando notación compleja tenemos

$$H = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$$

y la métrica se escribe

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\text{Im}z)^2}.$$

La curva $\gamma(t) = ie^t$ parametriza al semieje imaginario positivo y es una geodésica parametrizada con su longitud de arco. Transportando esta geodésica con isometrías es fácil encontrar la ecuación de cualquier geodésica.

2.49. PROPOSICION. El grupo de isometrías que preservan la orientación de H es el grupo de transformaciones de Moebius

$$(2.50) \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

tales que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.

DEMOSTRACION. En efecto, como la métrica en H es conforme, toda isometría debe de ser una función analítica que preserva el hemiplano superior, luego, toda isometría es una transformación de Moebius. Una transformación de Moebius que preserva al eje real debe tener coeficientes reales. Si, además, preserva el hemiplano superior la matriz asociada a la transformación de Moebius debe tener determinante positivo. Toda transformación de Moebius con coeficientes reales y determinante positivo se puede escribir en la forma (2.50). (Q.E.D.)

NOTA. El grupo completo de las isometrías de H que preservan o no la orientación de H está generado por la simetría $(x, y) \mapsto (-x, y)$ y las transformaciones del tipo (2.50). Para simplificar la discusión "isometría" significará isometría que preserva orientación.

Designemos con el símbolo $I(H)$ al grupo de las isometrías de H . Este grupo es isomorfo al grupo de matrices reales 2×2 al identificar cada matriz con su negativa. Sea $SL(2, \mathbb{R})$ el grupo de matrices 2×2 con determinante uno. Ya que D^2 es isométrico a H tenemos

$$I(D^2) = I(H) = SL(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\} = PSL(2, \mathbb{R}),$$

donde las dos primeras igualdades indican isomorfismos y la última define a $PSL(2, \mathbb{R})$ quien es llamado grupo proyectivo especial lineal y es un grupo de Lie de dimensión tres y, por lo tanto, una isometría queda determinada por tres números reales.

Para cada número real r , la translación euclidiana $T(z) = z+r$ y la homotecia euclidiana $T(z) = rz$, ($r > 0$), son isometrías de H .

En el modelo H las semirectas ortogonales al eje real son líneas geodésicas que parametrizadas por su longitud de arco de tal forma que la parte imaginaria sea creciente son todas positivamente asintóticas. Estas rectas determinan un punto impropio al que llamaremos ∞ . Para cada punto t en el eje real se tiene una clase de geodésicas asintóticas, a saber, todas las semicircunferencias, ortogonales al eje real, contenidas en H y que pasan por t (ver Figura 13).

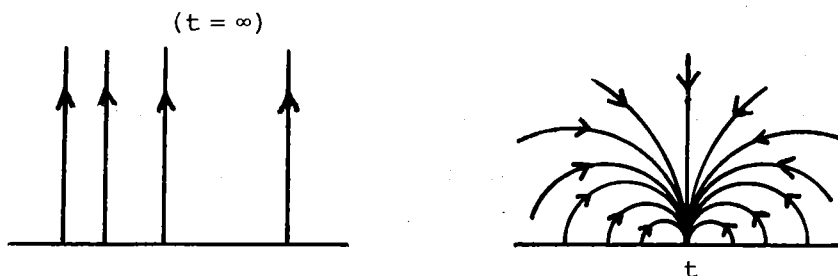


Fig. 13

Los puntos al infinito los podemos pensar como puntos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donde \mathbb{R} denota al eje real.

Los oriciclos que corresponden al punto ∞ son las curvas de H que cortan perpendicularmente a todas las rectas verticales, es decir, los oriciclos asociados a ∞ son las rectas horizontales $y = c$, donde c es una constante positiva. Para puntos distintos de ∞ los oriciclos son las circunferencias euclidianas contenidas en el hemiplano superior cerrado y tangentes al eje real (hay que suprimir, obviamente, el punto de tangencia, ver Figuras 14 y 15).

Fig. 14

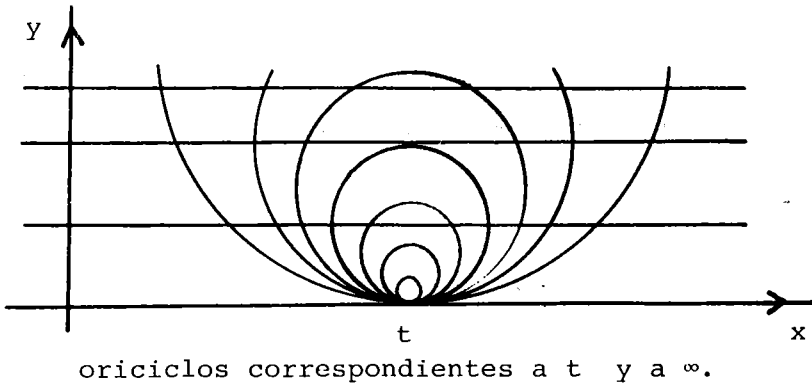
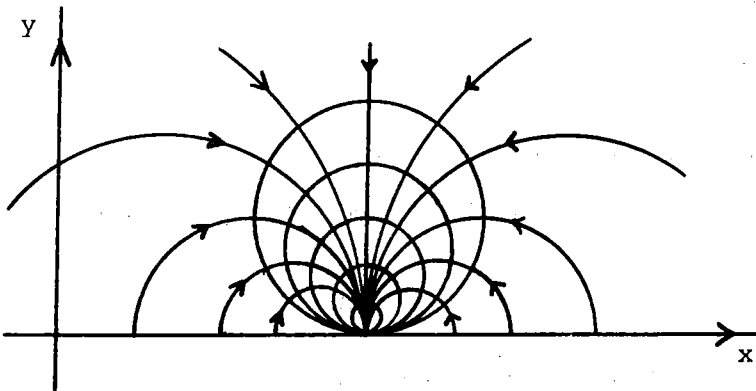


Fig. 15



orírculos que corresponden a una clase de equivalencia de geodésicas.

Sea h el orírculo que tiene por ecuación $y = c$, $c > 0$ y sea $z = a + ib$ un punto en H . Sea $\gamma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ una curva diferenciable tal que $\gamma(\alpha) = z$ y $\gamma(\beta) \in h$. Se tiene

$$\lambda(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{1/2} [y(t)]^{-1} dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{y}(t)| [y(t)]^{-1} dt,$$

donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, por lo cual se tiene:

$$d(\gamma) \leq |\log b - \log c|.$$

Por el otro lado, $d(z, a+ic) = |\log b - \log c|$ (d es la distancia hiperbólica en el modelo H). Concluimos lo siguiente:

$$(2.51) \quad d(z, h) = |\log b - \log c|.$$

De la fórmula (2.51) se sigue:

2.52. PROPOSICION. Los oriciclos h_1, h_2 que tienen por ecuaciones $y = c_1, y = c_2$ (con $c_1, c_2 > 0$) son curvas equidistantes de H que están a distancia hiperbólica $|\log c_1 - \log c_2|$.

El adjetivo "equidistante" que usamos en la proposición anterior quiere decir que la distancia hiperbólica de un punto variable de h_1 al oriciclo h_2 es constante.

2.53. Vecindades tubulares de líneas geodésicas.

Sea L la línea geodésica que corresponde al semieje imaginario positivo en el modelo H. Sea $\delta > 0$ y sea $T_\delta(L)$ definido así:

$$T_\delta(L) = \{z \in H; d(z, L) < \delta\}.$$

$T_\delta(L)$ es la δ -vecindad o la δ -vecindad tubular de L.

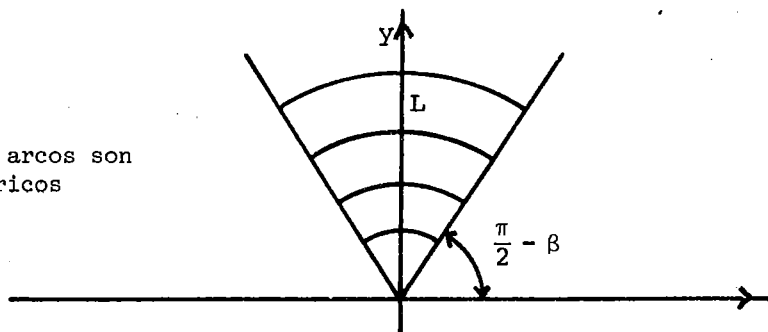
2.54. PROPOSICION. La δ -vecindad tubular es el conjunto de puntos de H que están en el sector

$\{z \in H; -\alpha < \arg(-iz) < \alpha\}$, donde $\alpha = 2 \tan^{-1}(e^\delta) - \frac{\pi}{2}$.

DEMOSTRACION. Como ya se vió antes, la distancia no euclidiana de un punto z a una recta no euclidiana L_0 es igual a la distancia no euclidiana $d(z, w)$, donde w es el pié de la perpendicular de z a w . Las rectas no euclidianas perpendiculares al eje imaginario son las semicircunferencias centradas en el origen y contenidas en H . Para cada β tal que $\frac{\pi}{2} > \beta > 0$ todos los arcos de estas circunferencias que quedan comprendidos en el sector $-\beta < \arg(-iz) < \beta$ son isométricos puesto que se puede transformar cualquiera de estos arcos en cualquier otro, mediante isometrías del tipo $T(z) = az$, donde a es un real positivo (ver Figura 16).

Fig. 16

Todos los arcos son isométricos



En el modelo H la distancia entre dos puntos z_1, z_2 , está dada por la fórmula:

$$(2.55) \quad d(z_1, z_2) = \log R(z_1, z_2; z_3, z_4),$$

donde z_3 y z_4 son los puntos en los que la línea geodésica que une a z_1 y z_2 corta a $\mathbb{R}U(\infty)$; los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 están ordenados cíclicamente en $\mathbb{R}U(\infty) \approx S^1$. La fórmula (2.55) es consecuencia de la fórmula (2.25)

puesto que la transformación (2.47) preserva la razón doble. Volviendo a la demostración de (2.54), vemos que la distancia del punto $z = re^{i\theta} \in H$ a la recta L es:

$$d(z,L) = \log R(ri, re^{i\theta}; r, -r) = \log R(i, e^{i\theta}; 1, -1)$$

si $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

luego,

$$d(z,L) = \log \left| \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} \right| = \log \tan\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right), \text{ si } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$d(z,L) = \log \cot\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right), \text{ si } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

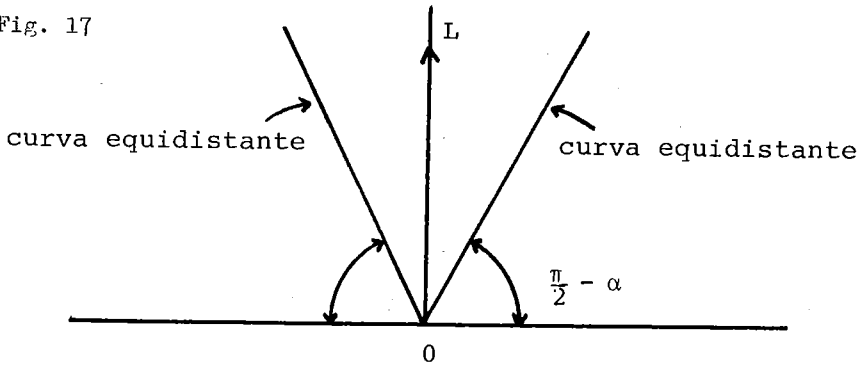
Por lo tanto,

$$(2.56) \quad \delta = d(z,L) = \log \tan\left(\frac{\pi + 2\alpha}{4}\right),$$

donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ es el ángulo que forma la recta euclidiana Oz con el eje imaginario positivo. De lo anterior se sigue inmediatamente la proposición. (Q.E.D.)

Nótese que en el curso de la demostración de la proposición (2.54) hemos demostrado algo más: el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta L con una distancia δ consiste de dos semirectas euclidianas, contenidas en \bar{H} , con vértice en el origen y formando un ángulo α con L (ver Figura 17).

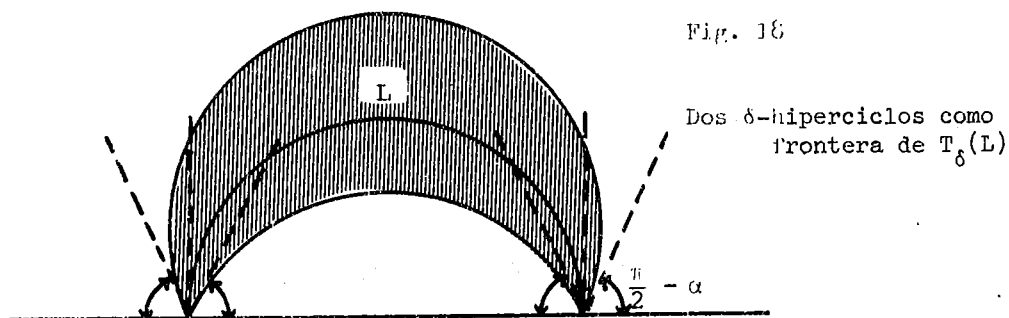
Fig. 17



Una curva que equidista de una geodésica en el plano hiperbólico se llama un hiperciclo. En el modelo H los δ -hiperciclos (es decir, las curvas que equidistan de una geodésica una distancia δ) son todas las circunferencias y rectas euclidianas de H que cortan al eje real en un ángulo constante $\frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - 2 \tan^{-1}(e^\delta)$. Se puede demostrar fácilmente que las isometrías de H actúan transitivamente en el conjunto de los δ -hiperciclos y que el subgrupo de las isometrías que fijan a un hiper ciclo, actúan transitivamente en este hiper ciclo. Como corolario de las observaciones anteriores tenemos: las curvas de H que tienen curvatura geodésica constante k son los círculos euclidianos que cortan en un ángulo constante al eje real (esta constante se puede calcular en términos de k).

Tenemos dos corolarios de la proposición (2.54):

2.57. COROLARIO. Si L es una línea geodésica arbitraria entonces la δ -vecindad tubular $T_\delta(L)$, es la región que contiene a L y que tiene como frontera los dos arcos de circunferencia euclidiana que pasan por los puntos al infinito de L y que cortan al eje real en un ángulo $\pi - 2 \tan^{-1}(e^\delta)$ (ver Figura 18).



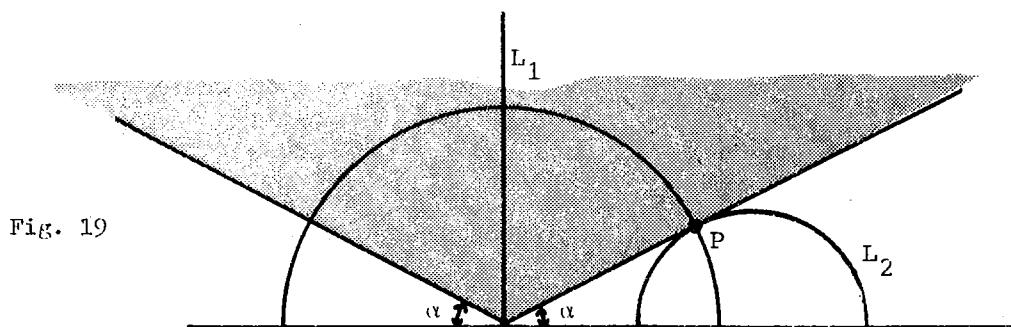
2.58. COROLARIO. Sean L_1 y L_2 dos rectas hiperbólicas que son ultraparalelas, entonces existe $c > 0$ tal que

$$d(L_1, L_2) = \inf_{\substack{z \in L_1 \\ w \in L_2}} d(z, w) = c.$$

En el modelo H , hemos visto que la δ -vecindad del eje imaginario positivo es un sector como el de la figura 16. Las imágenes de dicho sector, bajo isometrías de H son "lunas" como en la figura 18. Ya que el grupo de isometrías de H actúa transitivamente sobre las líneas geodésicas se sigue el primer corolario.

Si L_1 y L_2 son como en el segundo corolario, usando una isometría podemos suponer que L_1 es el semieje imaginario positivo. Como L_2 es ultraparalela de L_1 se sigue que sus puntos al infinito son números reales (distintos de ∞) del mismo signo y por lo tanto existe una recta euclidiana que pasa por el origen y que es tangente, en el punto P , al círculo que determina a L_2 . Esta recta y su simétrica con respecto a L_1 determinan un sector que es ajeno a L_2 y por lo tanto L_2 está a distancia positiva de

L_1 . Esto demuestra el segundo corolario. De hecho, hemos demostrado más: existe una única línea geodésica que es perpendicular a L_1 y L_2 . Esta única perpendicular es la semicircunferencia en H^2 que tiene centro euclidiano en el origen y que pasa por P.



Resumiendo:

2.59. PROPOSICION. Dos ultraparalelas en el plano hiperbólico tienen exactamente una perpendicular común. La distancia hiperbólica entre las dos rectas es igual a la distancia entre los pies de la perpendicular común a ella.

En el modelo H se puede construir con regla y compás la perpendicular común a dos ultraparalelas. Sean C_1 y C_2 los círculos de C que determinan a las líneas geodésicas. Sea E el eje radical de dichos círculos (el lugar geométrico de los puntos equipotentes con respecto a los círculos). Entonces E es una recta vertical que corta al eje real en el punto, digamos, Q . El punto Q tiene que ser externo a alguno de los círculos y se puede construir una tangente, en el punto P , a este círculo. La semicircunferencia con centro en Q y que pasa por P es la perpendicular común (ver Figura 20).

Cuando las semicircunferencias son concéntricas la perpendicular común es la semirecta en H perpendicular a \mathbb{R} y con vértice en el centro.

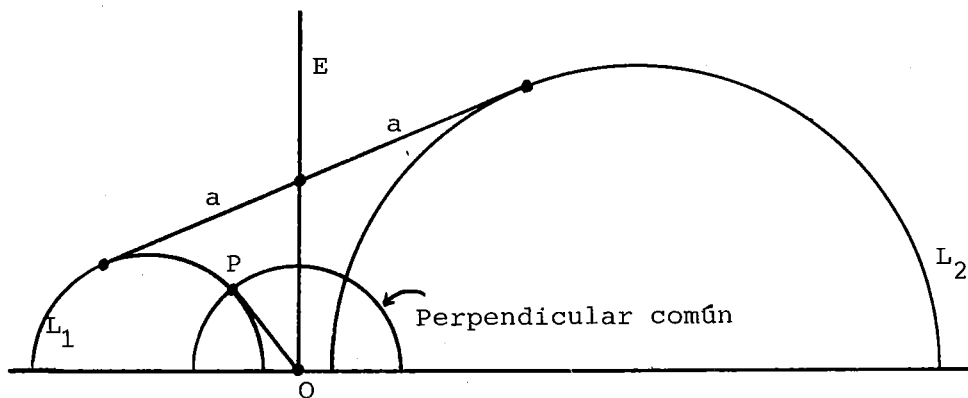


Fig. 20

En el modelo D^2 se tiene una construcción análoga usando también ejes radicales.

2.60. Areas.

Es posible desarrollar una teoría del área no euclidiana de figuras planas basándose exclusivamente en los axiomas de Hilbert, sin embargo, basándonos en los modelos concretos que hemos construido es más fácil definir el área de conjuntos medibles, en el sentido de Lebesgue, usando el elemento de superficie (una 2-forma) que es inherente a cada modelo. Por ejemplo, en el modelo del disco de Poincaré el elemento de superficie está dado por la 2-forma

$$(2.61) \quad dA = \frac{4dx \cdot dy}{(1-x^2-y^2)^2},$$

en otras palabras, para cualquier conjunto medible $\Omega \subset D^2$, el área de Ω ,

designada con el símbolo $A(\Omega)$, se obtiene mediante la fórmula:

$$(2.62) \quad A(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{4dx \cdot dy}{(1-x^2-y^2)^2} .$$

El elemento de área en el modelo H es

$$(2.63) \quad dA = \frac{dx \cdot dy}{y^2} ,$$

y el área de un conjunto medible $\Omega \subset H$ se obtiene así:

$$(2.64) \quad A(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx \cdot dy}{y^2} .$$

Las fórmulas (2.61) y (2.63) provienen de la definición usual de elemento de área en la teoría de las superficies iniciada por Gauss. Si

$$(ds)^2 = E(x,y)dx^2 + 2F(x,y)dx \cdot dy + G(x,y)dy^2$$

es el elemento de línea de una métrica riemanniana en una región del plano, entonces el elemento de área es:

$$dA = \sqrt{EG-F^2} \, dx \cdot dy$$

Si $\alpha: [a,b] \rightarrow H$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva cerrada, simple y diferenciable en pedazos y si Ω denota la región en H interior a α , entonces el área euclidiana de Ω , que denotaremos $A_e(\Omega)$ se calcula así:

$$A_e(\Omega) = - \int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt .$$

Esta fórmula es un caso particular de la fórmula de Green. Para calcular

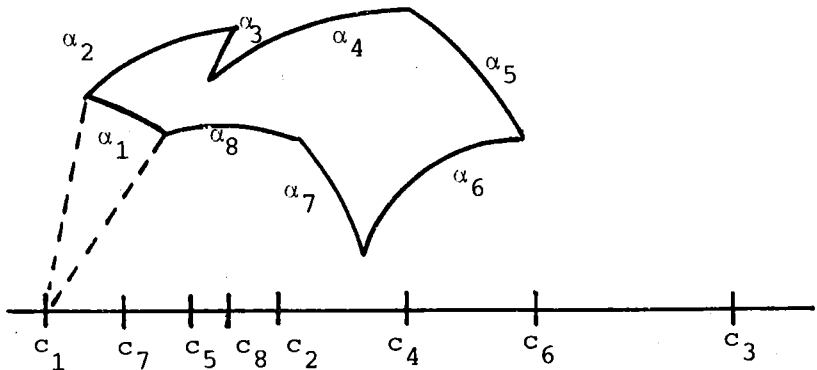
el área no euclidiana, $A(\Omega)$, utilizando el teorema de Green se obtiene la fórmula:

$$(2.65) \quad A(\Omega) = \int_a^b \frac{\dot{x}(t)}{y(t)} dt.$$

Obviamente la fórmula (2.65) no depende de las reparametrizaciones de α .

Apliquemos la fórmula (2.65) para calcular el área no euclidiana (o hiperbólica) de un polígono S cuya frontera es una curva cerrada simple formada por un número finito de arcos geodésicos. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ los arcos geodésicos que determinan la frontera del polígono S (ver Figura 21).

Fig. 21



De la fórmula (2.65) se obtiene:

$$A(S) = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{\dot{x}_i(t)}{y_i(t)} dt,$$

donde $\alpha_i: [a_i, b_i] \rightarrow H$, $\alpha_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, es una parametrización de α_i . Los arcos α_i son arcos de circunferencias cuyos centros están en el eje real. Supóngase que α_i pertenece al círculo centrado en el punto real c_i de radio r_i , entonces, α_i tiene una parametrización del tipo (ver Fig. 22):

$$\alpha_i(\theta) = (r_i \cos \theta + c_i, r_i \sin \theta), \quad \beta_i \leq \theta \leq \gamma_i$$

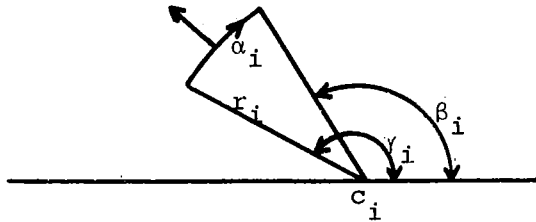


Fig. 22

Tenemos así:

$$A(S) = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i}^{\beta_i} -(r_i \sin \theta)^{-1} r_i \sin \theta d\theta = - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i}^{\beta_i} d\theta = \sum_{i=1}^n \gamma_i - \beta_i,$$

ahora bien, como ∂S es una curva cerrada tenemos

$$A(S) = \sum_{i=1}^n \gamma_i - \beta_i = \sum_{i=1}^n \theta_i - 2\pi K,$$

donde θ_i son los ángulos externos en cada vértice y K es el número de rotación de la curva. Se sigue del "Umlaufsatz" de Hopf, ya que la frontera del polígono es una curva simple, que $K = 1$ (ver Teorema 2.2.1 de [Kli]).

Tenemos finalmente la proposición siguiente:

2.66. PROPOSICION. Con las notaciones previas tenemos el área de S expresada así:

$$(2.67) \quad A(S) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \phi_i,$$

donde n es el número de lados del polígono cerrado simple y donde $\{\phi_i\}$ son los ángulos internos del polígono.

2.68. COROLARIO. El área hiperbólica de un triángulo Δ , con ángulos internos α , β , γ es:

$$(2.69) \quad A(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

El miembro derecho de la igualdad (2.69) se llama el defecto del triángulo. El corolario nos dice que el área de un triángulo no degenerado es igual a su defecto.

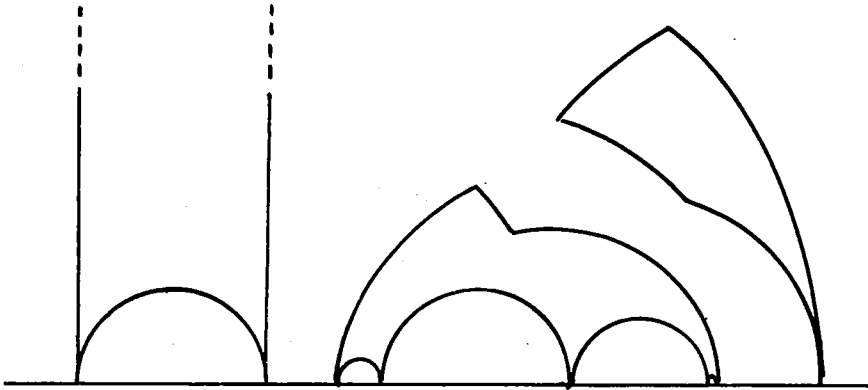
2.70. COROLARIO. El área de un triángulo hiperbólico nunca excede π y queda completamente determinado por los ángulos del mismo. La suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico no degenerado es menor que π .

El hecho de que el área de cualquier triángulo hiperbólico esté acotada por π contrasta con el caso euclidiano donde hay triángulos de área arbitrariamente grande. K.F. Gauss observó que el postulado de las paralelas es equivalente a admitir la existencia de triángulos de área arbitrariamente grande. Por el otro lado, en la geometría euclidiana existen triángulos con ángulos iguales que no son congruentes. Wallis demostró que el postulado de las paralelas es equivalente a la existencia de triángulos semejantes que no son congruentes.

NOTA. La proposición (2.66) pudo haber sido demostrada usando el teorema de Gauss-Bonnet y el hecho de que la curvatura de H es -1 . De hecho, la proposición da otra demostración de que H tiene curvatura -1 .

NOTA. La fórmula (2.67) es válida también para polígonos impropios, es decir, polígonos que tienen alguno o todos sus vértices en el círculo al infinito (ver Figura 23).

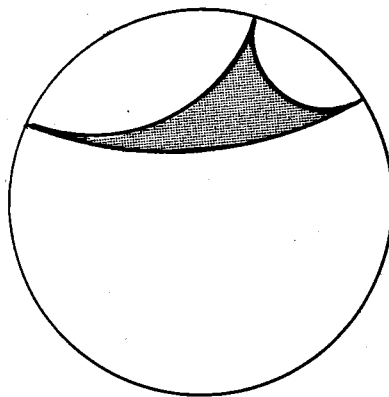
Fig. 23



Algunos polígonos impropios

2.71. DEFINICION. Un polígono ideal es un polígono con todos sus vértices en el infinito.

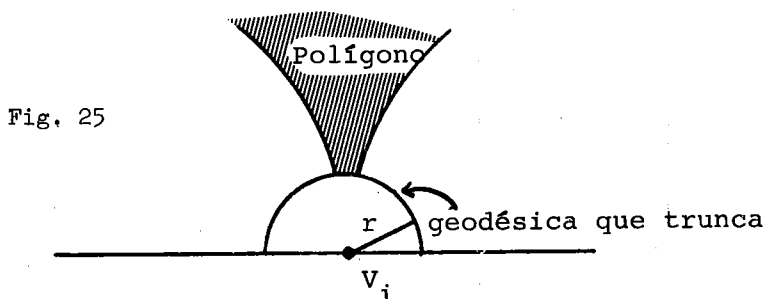
Fig. 24



Triángulo ideal

La demostración de la fórmula (2.67) en el caso de polígonos impropios

procede así: se trunca el polígono en cada vértice v_i en el infinito, con una circunferencia centrada en el vértice v_i y de radio r_i pequeño y hacemos tender todos los r_i a cero. Un cálculo directo demuestra que el área de los pedazos que truncamos tiende a cero cuando los radios tienden a cero (Figura 25).

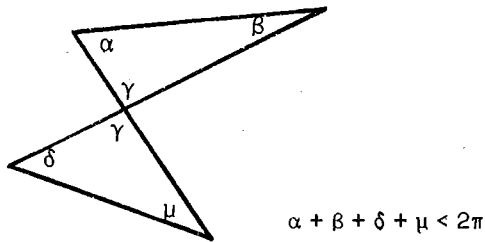


Polígono truncado en el vértice impropio V_i

2.72. NOTA. Claramente los ángulos internos en los vértices impropios de un polígono son cero. Por lo tanto el área de un polígono ideal de n lados es $(n-2)\pi$. En particular el área de un triángulo hiperbólico ideal es π .

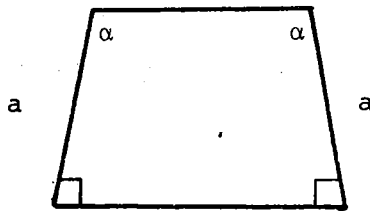
El área de un cuadrilátero hiperbólico cuyos lados no se cruzan es menor que 2π (es exactamente 2π cuando el cuadrilátero tiene todos sus vértices impropios). Por lo tanto, la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero propio es menor que 2π y esto sigue siendo válido para cuadriláteros cruzados como en la figura esquemática 26.

Fig. 26



Historicamente, los cuadriláteros jugaron un papel importante en tratar de probar el postulado de las paralelas. Esto es debido al padre jesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) quién consideró cuadriláteros del tipo presentado en la Figura 27:

Fig. 27



Cuadrilátero de Saccheri

Excluyendo el axioma de las paralelas nada impide que α pueda ser agudo u obtuso. En la geometría hiperbólica α tiene que ser agudo. Saccheri puede ser considerado también como padre de la geometría no euclidiana.

Ahora probaremos algo más fuerte que la afirmación del Corolario 2.70.

2.73. PROPOSICION. Dados dos triángulos hiperbólicos Δ_1 y Δ_2 con ángulos correspondientes iguales, existe una isometría del plano hiperbólico que lleva a uno en el otro (suponemos que los triángulos no son degenerados).

DEMOSTRACION. Primero notemos que hay una ambigüedad en el enunciado puesto que tenemos que decir qué significa transformar un vértice impropio en otro. Esto significa lo siguiente: hemos definido punto al infinito intrínsecamente como una clase de equivalencia de líneas geodésicas orientadas y una isometría manda clases de equivalencia en clases de equivalencia, luego, toda isometría se extiende de manera única a una correspondencia biunívoca entre los puntos al infinito. Esto no depende del modelo y por lo tanto somos libres de usar el modelo D^2 .

Ahora bien, sean z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 los vértices de Δ_1 y Δ_2 , respectivamente. Supóngase que los ángulos internos en índices iguales son iguales. Si los dos triángulos son ideales entonces sea $T: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ la transformación de Moebius $w = T(z)$ que satisface

$$R(T(z), w_1; w_2, w_3) = R(z, z_1; z_2, z_3).$$

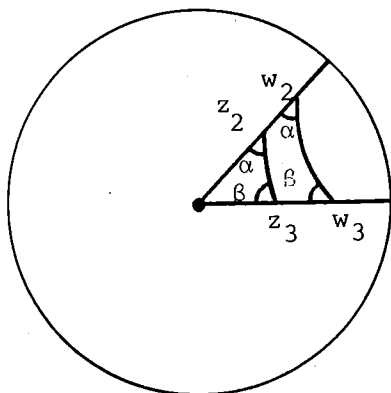
Si el orden cíclico, en S^1 , de w_1, w_2 y w_3 coincide con el orden cíclico de z_1, z_2, z_3 , entonces T preserva a D^2 y es por lo tanto una isometría. Reordenando los puntos siempre se puede lograr esto. Luego, Δ_1 y Δ_2 son isométricos. Existen 6 isometrías exactamente de Δ_1 en Δ_2 , tres que preservan la orientación y tres que la invierten. Las isometrías que invierten la orientación son del tipo

$$R(w, w_1; w_2, w_3) = (\bar{z}, z_1; z_2, z_3).$$

Si uno de los triángulos es propio el otro necesariamente es también propio (no hay triángulos propios, no degenerados con ángulo en un vérti-

ce igual a 0 ó π). Usando isometrías se puede suponer que Δ_1 y Δ_2 tienen al origen como vértice común y a dos segmentos radiales como lados (ver Figura 28).

Fig. 28



Usando la isometría $T: D^2 \rightarrow D^2$, $T(z) = \bar{z}$ podemos suponer que los triángulos tienen la misma orientación. Una vez superpuestos Δ_1 y Δ_2 hay dos posibilidades como lo muestra la figura esquemática 29:

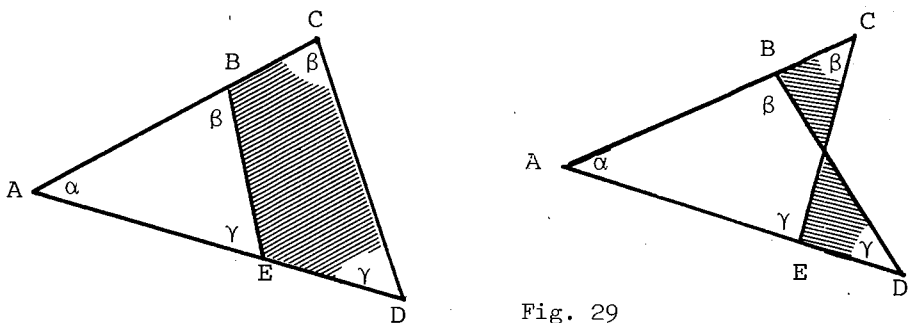


Fig. 29

Si al superponer los triángulos no fuesen congruentes, se tendría un cuadrilátero (que puede ser de los dos tipos sombreados en la Figura 29) cuya suma de sus ángulos internos sería 2π , lo que contradice la proposición 2.66.

Dejo al lector verificar la proposición en el caso en el que Δ_1 y Δ_2 tienen vértices propios e impropios. (Q.E.D.)

NOTA. Si el lector prefiere una demostración analítica de la proposición puede hacer lo siguiente: La transformación $T(z) = w$ que satisface

$$R(w, w_1; w_2; w_3) = R(z, z_1; z_2, z_3),$$

de dos triángulos con ángulos iguales en índices iguales y con la misma orientación, preserva D^2 . La demostración usando cuadriláteros la hemos tomado del bellísimo libro de L. Santaló: "Geometrías no Euclidianas" EUDEBA, Buenos Aires, 1961.

2.74. Angulo de paralelismo.

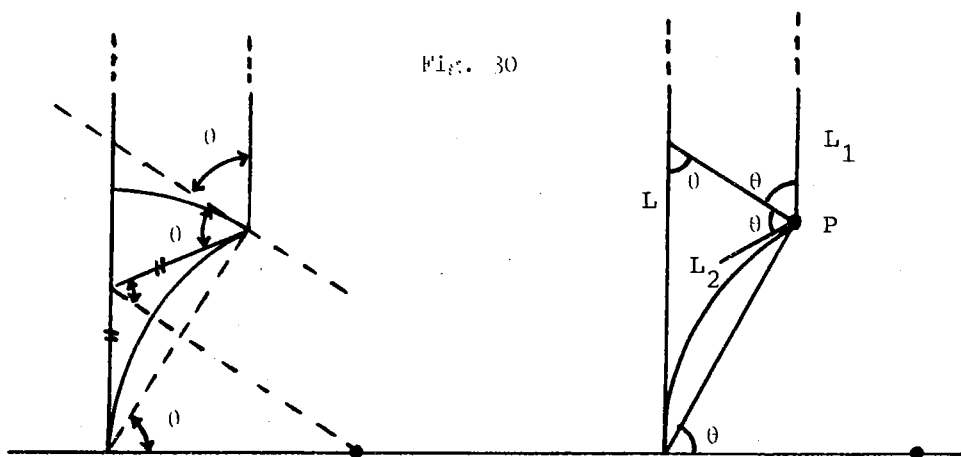
Como se ha visto ya, por un punto externo a una recta hiperbólica existe una y sólo una perpendicular y exactamente dos paralelas a la recta, que pasan por el punto externo. Queremos calcular el ángulo que forman estas paralelas con la normal, en función de la distancia del punto a la recta.

En el modelo H la pareja que consiste de una recta no euclidiana L y un punto externo P , a distancia d de la recta, siempre puede ser llevada, por una isometría a la pareja que consiste del semieje imaginario positivo y el punto $e^{i\theta}$, donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $\log \tan \frac{\pi-\theta}{2} = d$ (ver Figura 30).

El ángulo de paralelismo θ de la recta L con respecto al punto externo P , a distancia hiperbólica d de la recta, es el ángulo que forman las paralelas a L , que pasan por P , con la normal de P a L . De la Figura 30,

concluimos que las paralelas L_1 y L_2 por el punto P a distancia d de L tienen ángulo de paralelismo $\theta = \pi - 2 \tan^{-1}(e^{-d})$. (Por lo tanto, el ángulo que forman las dos paralelas siempre es inferior a π .) La fórmula para θ puede también escribirse en la forma más bonita, debida a Lobachevsky, siguiente:

$$(2.75) \quad \tan \frac{\theta}{2} = e^{-d}$$



2.76. Unidad de medida.

Tanto en la geometría euclidiana como en la geometría no euclidiana existe un ángulo privilegiado: el recto. Este ángulo sirve como unidad natural para medir ángulos. Sin embargo, en la geometría euclidiana no existe una unidad natural para medir distancias, que se obtenga de los axiomas de la geometría. Esto es debido al hecho de que existen figuras semejantes que no son congruentes. Como contraste, en la geometría hiperbólica plana los modelos son superficies con una métrica completa de curvatura constante negativa k y simplemente conexas (por lo tanto homeomor-

fas a un disco de \mathbb{R}^2). Fijar una unidad de medida ya sea de longitudes o de áreas es completamente equivalente a escoger un modelo con curvatura fija $K < 0$. Resulta natural tomar $K = -1$.

2.77. Como se topologiza el "horizonte".

Si H es el plano hiperbólico, es decir cualquier superficie completa de curvatura constante -1 y simplemente conexa, entonces, todas las geodésicas parametrizadas con su longitud de arco que parten de un punto $P \in H$ están determinadas por su vector tangente en P . Además, toda geodésica de H es positivamente asintótica a exactamente una de las geodésicas que empiezan en P . Luego, las geodésicas que emanan de P con velocidad uno forman una clase completa de representantes de la relación de equivalencia de asintoticidad positiva. Por lo tanto, tenemos una correspondencia biyectiva entre los puntos ideales y los vectores unitarios tangentes a H en P . Estos vectores tangentes anclados en P tienen una topología natural con la cual forman un círculo (la topología es la inducida en estos vectores unitarios por el producto interno del plano tangente a P). De esta manera hemos topologizado el conjunto de puntos ideales con una métrica que lo hace isométrico al círculo unitario. Una isometría de H induce un homeomorfismo del conjunto de puntos ideales con la topología anterior, es decir, cada isometría induce un difeomorfismo del círculo. La topología ciertamente parece depender del punto P puesto que la identificación del "horizonte" con S^1 depende de P , sin embargo, si se hubiese escogido otro punto, P^1 , las identificaciones difieren solamente de una transformación proyectiva del círculo. No es difícil demostrar de que la

acción de las isometrías en el "horizonte" es equivalente a la acción de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ en S^1 , es decir, a la acción del grupo proyectivo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ en $S^1 = \mathbb{P}^1$.

2.78. El plano proyectivo \mathbb{P}^2 .

Recordemos que el plano proyectivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ o simplemente, \mathbb{P}^2 se obtiene del plano euclidiano \mathbb{R}^2 añadiéndole un conjunto de puntos ideales que forman la recta al infinito. Luego, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup L_\infty$ donde L_∞ , llamada recta al infinito es el conjunto cuyos puntos son las clases de equivalencia, en el conjunto de rectas euclidianas de \mathbb{R}^2 , que corresponde a la relación de equivalencia de paralelismo entre rectas. El conjunto de rectas que pasan por el origen es un conjunto completo de representantes para L_∞ . Una representación o realización geométrica concreta de \mathbb{P}^2 es la siguiente:

Sea Π un plano en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . Consideremos a Π como el plano \mathbb{R}^2 al cual agregamos la recta ideal L_∞ como en el párrafo anterior para formar un plano proyectivo $\hat{\Pi}$. Fijemos un plano Π_1 paralelo a Π y una esfera S con su centro en el punto O en Π_1 , de tal suerte que S es tangente a Π en un punto que llamaremos A , como en la Figura 31.

Cada punto P de Π determina una única recta L de \mathbb{R}^3 que pasa por A . Claramente L no está contenido en Π_1 , y reciprocamente toda recta L pasando por A y de este tipo determina un único punto P de Π . Por otra parte, un punto de la recta al infinito L_∞ para Π es por definición el conjunto $[M]$ de todas las rectas de Π paralelas a una recta dada M de Π . Existe exactamente una recta L en \mathbb{R}^3 que pasa por A y que es paralela a M , es decir, esta contenida en Π_1 ; reciprocamente, toda L de este tipo determina

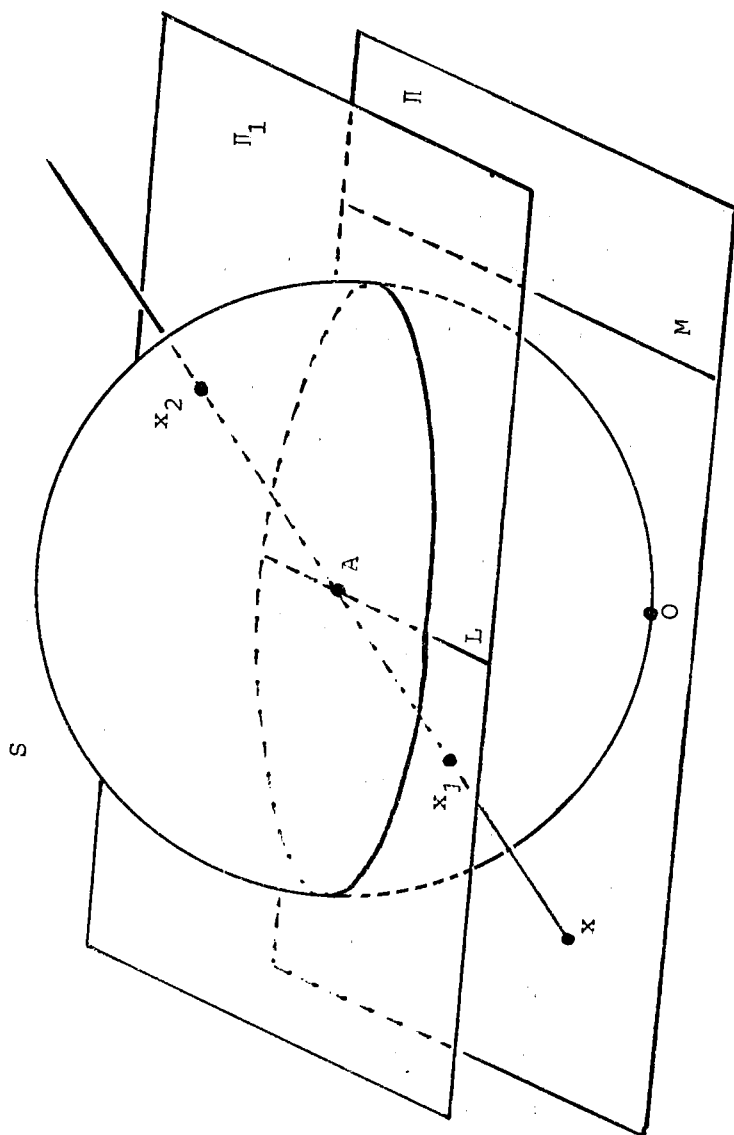


Fig. 31

una única clase de paralelas de Π , o sea, un punto al infinito de $\hat{\Pi}$. Hemos definido una correspondencia biyectiva entre $\hat{\Pi}$ y la familia de todas las rectas L de \mathbb{R}^3 que pasan por A , bajo la cual L corresponde a un punto de Π si y solo si no está contenido en Π_1 .

Ya que cada recta L que pasa por A intersecta a S en un par de puntos antipodales x_1, x_2 obtenemos una segunda representación concreta de \mathbb{P}^2 , como el espacio obtenido de S al identificar puntos diametralmente opuestos. Se podría suponer, desde luego, que S es la esfera unitaria centrada en el origen.

2.79. Coordenadas y transformaciones proyectivas.

Dos puntos distintos \bar{x}, \bar{y} , de \mathbb{R}^3 , (distintos del origen) determinan una recta que pasa por el origen si y solo si existe un número real, no nulo, λ tal que $\bar{x} = \lambda\bar{y}$. Sea " \sim " la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ definida así:

$$\bar{x} \sim \bar{y} \leftrightarrow \text{existe } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \text{ tal que } \bar{x} = \lambda\bar{y}.$$

Denotemos con $\mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim$ al espacio cociente bajo esta relación de equivalencia y sea $(x_0 : x_1 : x_2)$ la clase de equivalencia a la que pertenece $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Tenemos una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim$ y el conjunto de rectas que pasan por el origen, dada por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow \text{recta que pasa por el origen y por } (x_0, x_1, x_2).$$

Tenemos que $\mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim$ es otra representación de \mathbb{P}^2 , es decir, tenemos una correspondencia biyectiva

$$j: \mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim \rightarrow \mathbb{P}^2,$$

con la cual identificamos a los dos conjuntos.

2.80. DEFINICION. La clase de equivalencia $(x_0:x_1:x_2)$ se llama coordenadas proyectivas del punto $P \in \mathbb{P}^2$ tal que $j((x_0:x_1:x_2)) = P$.

Toda transformación lineal

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

lleva rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen, y planos que pasan por el origen en planos que pasan por el origen. Si A es invertible, entonces A manda biyectivamente al conjunto de rectas sobre el conjunto de rectas y al conjunto de planos sobre el conjunto de planos. Por lo tanto, A induce una biyección

$$(2.81) \quad \hat{A}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2.$$

En términos de coordenadas proyectivas \hat{A} está dada como una función lineal de las mismas:

$$\hat{A}(x_0:x_1:x_2) = (y_1:y_2:y_3)$$

donde

$$y_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2$$

$$y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_3 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

La matriz $((a_{ij}))$, $(0 \leq i, j \leq 2)$ es la matriz asociada a A con respecto a la base estandar de \mathbb{R}^3 . La transformación \hat{A} se llama la transformación proyectiva inducida por la transformación lineal A . Las transformaciones proyectivas forman un grupo llamado grupo lineal proyectivo real de dimensión dos. A este grupo lo designaremos con el símbolo $PL(2, \mathbb{R})$.

Si $A, B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos transformaciones lineales invertibles, entonces, inducen la misma transformación proyectiva si y solo si AB^{-1} fija a cada recta que pasa por el origen. Esto último ocurre si y solo si AB^{-1} es un múltiplo escalar de la identidad:

$$AB^{-1} = \lambda I, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad I = \text{identidad.}$$

Sea $GL(3, \mathbb{R})$ el grupo de automorfismos lineales de \mathbb{R}^3 . Si $A \in GL(3, \mathbb{R})$, sea $\hat{A} \in PL(2, \mathbb{R})$ la transformación proyectiva inducida por A . Obviamente,

$$\widehat{AB} = \hat{A} \cdot \hat{B};$$

luego, si $\psi: GL(3, \mathbb{R}) \rightarrow PL(2, \mathbb{R})$ es la función

$$\psi(A) = \hat{A},$$

se sigue que ψ es un homomorfismo de grupo: se llama homomorfismo de proyectivización. El homomorfismo ψ tiene por núcleo al subgrupo $\Lambda \subset GL(3, \mathbb{R})$ de las transformaciones escalares de \mathbb{R}^3 (múltiplos no nulos de la identidad). Es fácil verificar que Λ es el centro del grupo $GL(3, \mathbb{R})$ y es, por lo tanto, un subgrupo normal. Como consecuencia tenemos:

2.82. PROPOSICION. $PL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo al grupo cociente $GL(3, \mathbb{R})/\Lambda$ y por

tanto es un grupo de Lie de dimensión 8.

Siguiendo el programa de Felix Klein, se define la geometría proyectiva plana como el estudio de las propiedades y estructuras invariantes de \mathbb{P}^2 , bajo la acción del grupo $PL(2, \mathbb{R})$. Los puntos proyectivos son los puntos de \mathbb{P}^2 , las rectas proyectivas son, topológicamente, círculos y son las imágenes, bajo j , de los planos que pasan por el origen (suprimiendo al origen). Las transformaciones proyectivas mandan rectas proyectivas en rectas proyectivas y una tal transformación queda completamente determinada por su valor en cuatro puntos en posición general (es decir, que ninguna terna sea colineal). Esto último es evidente puesto que una transformación lineal e invertible de \mathbb{R}^3 queda fija una vez que se conoce su valor en cuatro rectas tales que ninguna terna sea coplanar (también es consecuencia del hecho que $PL(2, \mathbb{R})$ tiene dimensión 8 así como $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$).

El grupo $SO(3)$, de las rotaciones de \mathbb{R}^3 es un grupo compacto de $GL(3, \mathbb{R})$ y su proyectivización, el grupo $\psi(SO(3)) \subset PL(2, \mathbb{R})$ se llama el grupo ortogonal proyectivo y lo denotaremos con el símbolo $PSO(3)$. Si damos a \mathbb{P}^2 la métrica inducida de S^2 , por la identificación antipodal, vemos que $PSO(2, \mathbb{R})$ actúa isométrica y transitivamente en \mathbb{P}^2 . Las propiedades y estructuras invariantes bajo esta última acción definen a la geometría elíptica plana.

2.83. Cónicas.

Los ceros de un polinomio real, homogéneo y de grado n , $p(x_0, x_1, x_2)$, determinan un conjunto de puntos de \mathbb{P}^2 al que denotamos con $Z(p)$:

$$Z(p) = \{(x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{P}^2; p(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Ya que p es homogéneo, $Z(p)$ está bien definido, aunque pudiera ser vacío, por ejemplo si

$$p(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \text{ entonces } Z(p) = \phi.$$

2.84. DEFINICION. Una cónica proyectiva Q es el conjunto de puntos $Z(p)$ que son ceros del polinomio homogéneo de segundo grado,

$$p(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j.$$

Asociada a cada cónica tenemos una matriz 3×3 , real y simétrica $A = ((a_{ij}))$, ($0 \leq i, j \leq 2$) tal que

$$p(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

o en notación matricial

$$p(\vec{x}) = \vec{x} A \vec{x}^T.$$

Cuando $\det(A) = 0$ (pero $A \neq 0$) decimos que Q es una cónica degenerada. En este caso $Q \neq \phi$ y Q es la unión de dos rectas proyectivas. Si A es positiva o negativa y $\det A \neq 0$, entonces manifiestamente $Q = \phi$.

2.85. DEFINICION. Dos cónicas, no vacías, Q_1 y Q_2 son proyectivamente

equivalentes si se puede pasar de la una a la otra por una transformación proyectiva, esto es, si existe $A \in PL(2, \mathbb{R})$ tal que $A(Q_1) = Q_2$.

2.86. PROPOSICION. Dos cónicas Q_1, Q_2 no vacías y no degeneradas siempre son proyectivamente equivalentes.

DEMOSTRACION. Sea $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$ dos matrices simétricas que definen a Q_1 y Q_2 , respectivamente. Por hipótesis $\det(A)$ y $\det(B)$ no son nulos. Basta demostrar que existe C no singular tal que $CAC^T = B$. Por álgebra lineal y formas cuadráticas sabemos que dada una matriz simétrica S , existe una matriz ortogonal $O \in SO(3)$ tal que

$$OSO^T = \text{diagonal } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

para algunos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Luego, toda cónica no degenerada y no vacía es ortogonalmente equivalente a una cónica del tipo

$$(2.87) \quad a^2 x_0^2 + b^2 x_1^2 - c^2 x_2^2 = 0, \quad \text{con } a, b, c > 0.$$

(el caso con coeficientes estrictamente positivos no es posible, pues la cónica es no vacía).

Si utilizamos la transformación proyectiva que proviene de la matriz

diagonal $((\sqrt{a})^{-1}, (\sqrt{b})^{-1}, (\sqrt{c})^{-1})$ vemos que la cónica (2.87) es equivalente a la cónica

$$(2.88) \quad x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Por lo tanto, toda cónica no degenerada y no vacía es equivalente a la cónica (2.88).

2.89. COROLARIO. Si $Q \subseteq \mathbb{P}^2$ es una cónica no degenerada y no vacía, entonces

- i) Q es topológicamente un círculo.
- ii) La cónica separa en dos componentes conexas a \mathbb{P}^2 : una, llamada interior, es topológicamente un disco abierto y la otra es topológicamente una cinta de Moebius y la llamamos el exterior de Q .
- iii) Existen una infinidad de rectas que no cortan a Q .
- iv) Q es contractible a un punto, en \mathbb{P}^2 .

Aunque no daremos en completo detalle la prueba del corolario 2.89, sí haremos las suficientes observaciones para que el lector pueda completar los huecos. En primer lugar, notemos que \mathbb{P}^2 es, con la topología cociente de $\mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim$, una superficie diferenciable, compacta y no orientable, cuya estructura diferenciable hace que la aplicación canónica

$$\pi: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$$

sea una función diferenciable que es una submersión (aún más, una fibración localmente trivial). La imagen inversa $\pi^{-1}(p)$ es $L - \{0\}$, donde L es

una recta de \mathbb{R}^3 que pasa por el origen. Si $\alpha:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ es una curva tal que $\alpha(t)$ y $\dot{\alpha}(t)$ son linealmente independientes para todo $t \in (a,b)$ (es decir, si α no es tangente a ninguna de las rectas que pasan por el origen), entonces $\pi \circ \alpha$ es una submersión. Análogamente, si $\phi:U \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ es una función diferenciable, definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, y tal que ϕ es transversal a la familia de rectas que pasan por el origen, entonces $\pi \circ \phi:U \rightarrow \mathbb{P}^2$ también es una submersión. En particular, si $S \subseteq \mathbb{R}^3 - \{0\}$ es una superficie diferenciable que corta transversalmente a todas las rectas de \mathbb{R}^3 , que pasan por el origen, entonces la restricción de π a S es una submersión. Si además, S corta a cada recta que pasa por el origen en a lo más un punto, entonces π restringida a S es un difeomorfismo en su imagen (que es un abierto de \mathbb{P}^2). Sea Q una cónica arbitraria. El grupo $PL(2, \mathbb{R})$ actúa difeomorficamente en \mathbb{P}^2 (cada transformación proyectiva es un difeomorfismo) y por lo tanto para demostrar el corolario se puede suponer que Q es la cónica especial (2.88). El lugar geométrico C , de los puntos (x,y,z) de \mathbb{R}^3 que satisfacen la ecuación

$$C: x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

es un cono circular recto cuyas generatrices son rectas que pasan por el origen. El ángulo del cono en el vértice (que es el origen) es $\frac{\pi}{2}$ (ver Figura 32).

El círculo de \mathbb{R}^3 que es la intersección de C con el plano $z = 1$ y que tiene por parametrización

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1),$$

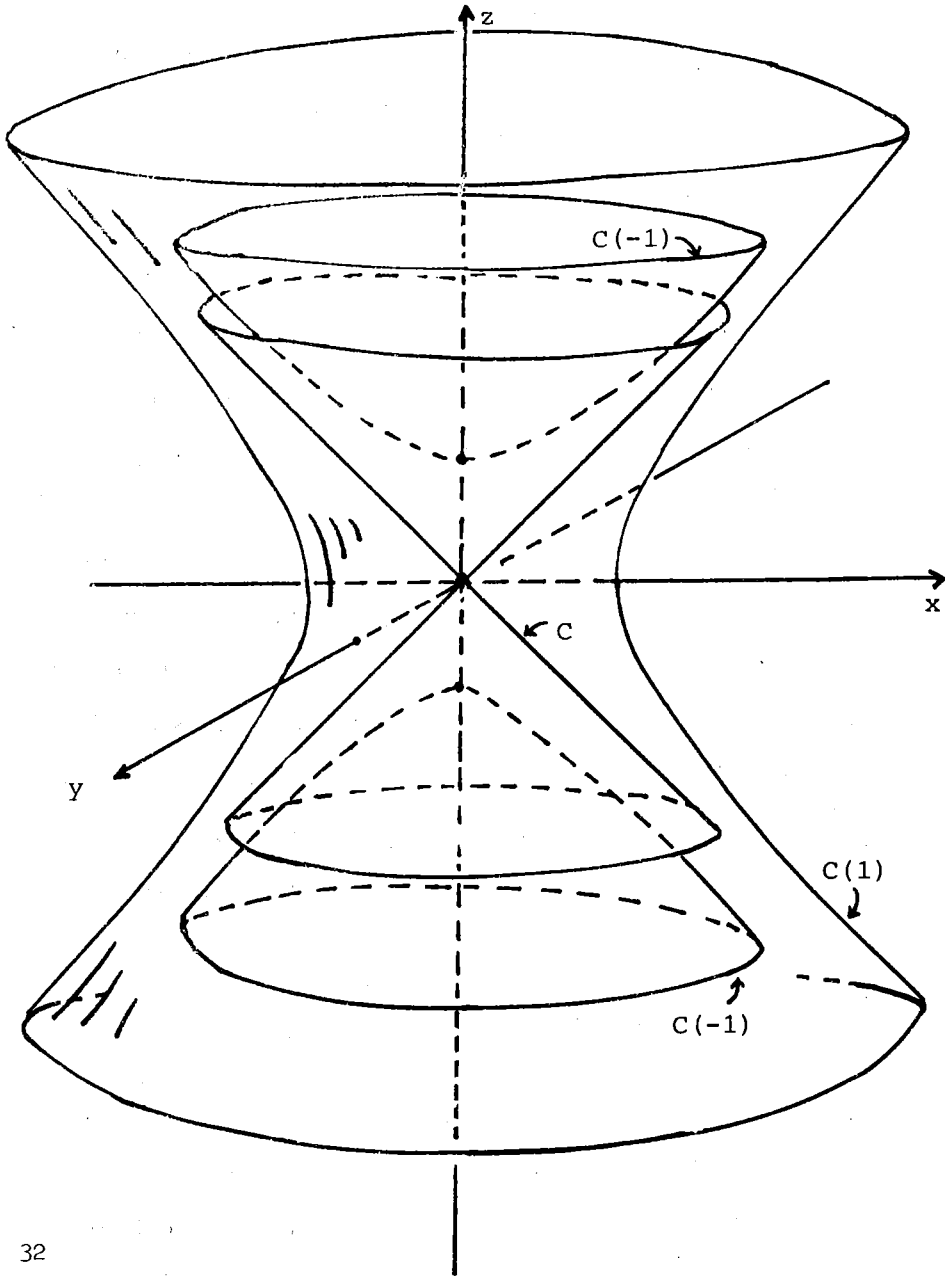


Fig. 32

Superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

corta a todas las generatrices de C y no es tangente a ninguna generatriz. Sea K este círculo. Obviamente tenemos $\pi(K) = Q$, luego, la cónica Q es un círculo encajado en \mathbb{P}^2 . Ahora bien, si $C(r) = f^{-1}(r)$ denota a la superficie de nivel de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

entonces $C(r)$ es una superficie cerrada y diferenciable de \mathbb{R}^3 , para todo $r \neq 0$. Además, ya que el gradiente de f en el punto (x_0, y_0, z_0) es el vector $(2x_0, 2y_0, -2z_0)$, se sigue que el producto escalar de (x_0, y_0, z_0) con este gradiente es $2(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)$, luego, este producto escalar es diferente de cero en todos los puntos del complemento del cono $C = C(0)$. Tenemos, como consecuencia, que todas las superficies de nivel $C(r)$ son transversales a las rectas que pasan por el origen cuando $r \neq 0$. Como resultado de lo anterior tenemos que la restricción de π a $C(r)$ es una submersión si $r \neq 0$. Para cada $r < 0$, $C(r)$ es un hiperboloide de revolución con dos hojas y con eje de revolución el eje z . Cuando $r > 0$, $C(r)$ es conexo y es un hiperboloide de revolución también (ver Figura 32). Sea $S(-1)$ la hoja superior de $C(-1)$, es decir,

$$S(-1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}.$$

Cada recta que pasa por el origen corta a $S(-1)$ en a lo más un punto y por lo tanto π restringido a $S(-1)$ es un difeomorfismo. Claramente la "copa" $S(-1)$ es difeomorfa a un disco, luego, $\pi(S(-1))$ es difeomorfa a un disco. Ya que $S(-1)$ es asintótica al cono C , tenemos que $\pi(S(-1))$ tiene como frontera a Q . Por el otro lado, $C(1)$ es difeomorfa a un cilindro

$S^1 \times \mathbb{R}$ y es simétrica con respecto al origen. Puesto que $\pi(x,y,z) = \pi(-x,-y,-z)$ tenemos que π restringida a $C(1)$ es una proyección recubridora doble de su imagen. El espacio obtenido al identificar en $C(1)$ puntos simétricos con respecto al origen es una cinta de Moebius que es difeomorfa a $\pi(C(1))$. Como $C(1)$ es asintótica a C , tenemos $\partial(\pi(C(1))) = Q$. De esta manera se demuestra que el interior y el exterior de Q son un disco abierto y una cinta de Moebius, respectivamente. Ya que Q es la frontera de un disco, Q es contractible a un punto en \mathbb{P}^2 . Todos los planos de \mathbb{R}^3 que cortan al cono C exactamente en el origen se transforman bajo π en rectas que no cortan a Q .

En términos de coordenadas proyectivas el interior y el exterior de Q a quienes designaremos con los símbolos $i(Q)$ y $e(Q)$, respectivamente, se pueden dar, usando la forma cuadrática que define a Q , así:

$$i(Q) = \{(x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{P}^2; x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 < 0\}$$

(2.90)

$$e(Q) = \{(x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{P}^2; x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 > 0\} .$$

2.91. El modelo proyectivo del plano hiperbólico.

En este modelo los puntos de la geometría son los puntos de $i(Q)$ y las rectas no euclidianas son las intersecciones de las rectas proyectivas con $i(Q)$. Todos los axiomas de la geometría no euclidiana plana son válidos si la noción de congruencia entre parejas de puntos de $i(Q)$ es la siguiente:

Dos puntos $a, b \in i(Q)$ son congruentes a la pareja de puntos $c, d \in i(Q)$

si existe $A \in PL(2, \mathbb{R})$ que es una transformación proyectiva tal que $A(Q) = Q$ y tal que $A(a) = c$, $A(b) = d$.

La cónica Q se suele llamar la cónica absoluta y, siguiendo la definición de Felix Klein, decimos que la geometría no euclidiana plana consiste del estudio de las propiedades y estructuras invariantes en $i(Q)$, bajo el grupo de las transformaciones proyectivas que fijan a la cónica absoluta.

Sea $P(Q) \subset PL(2, \mathbb{R})$ el subgrupo de las transformaciones proyectivas que fijan a la cónica Q . Notemos que aunque \mathbb{IP}^2 no es orientable, $i(Q)$ al ser difeomorfo a un disco sí es orientable. Sea $P_+(Q)$ el subgrupo, de índice dos, de $P(Q)$ que consiste de las transformaciones proyectivas que fijan a Q y que preservan la orientación de $I(Q)$.

2.92. PROPOSICION. $P_+(Q)$ actúa transitivamente en $i(Q)$ y también actúa transitivamente en las rectas no euclidianas de $i(Q)$.

DEMOSTRACION. Cada transformación $\hat{A} \in P_+(Q)$ es la proyectivización de una transformación lineal,

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

que preserva la forma cuadrática en \mathbb{R}^3 , siguiente:

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Denotemos con la misma letra g a la forma bilineal asociada a la forma cuadrática, es decir

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g((x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)) = x_0 y_0 + x_1 y_1 - x_2 y_2$$

o bién:

$$(2.93) \quad g(x, y) = x F y^T,$$

donde $x = (x_0, x_1, x_2)$, $y = (y_0, y_1, y_2)$, $F = \text{diagonal } (1, 1, -1)$.

La forma bilineal (2.93) define un producto interno, indefinido, de \mathbb{R}^3 de signatura (2,1) (es decir, de índice de positividad 2, e índice de negatividad 1. La signatura también se suele escribir (+,+, -)).

Sea $x = (x_0, x_1, x_2)$ y supongamos que $g(x) = -1$. Sea $F(x) = \{y \in \mathbb{R}^3; g(x, y) = 0\}$. Por álgebra lineal, (el teorema de Sylvester) se tiene que $F(x)$ tiene dimensión dos y la restricción del producto interno g a $F(x)$ es positivamente definido (esto es, un producto escalar euclidiano). Geométricamente es más fácil demostrar lo anterior y, de hecho, podemos visualizar $F(x)$ de la siguiente manera: Sea $P(x)$ el subespacio de \mathbb{R}^3 que es ortogonal a x con respecto al producto interno euclidiano usual de \mathbb{R}^3 . Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la reflexión con respecto al plano (x, y) , $T(x, y, z) = (x, y, -z)$. Se tiene $F(x) = T(P(x))$. Ya que el plano $F(x)$ corta al cono C solamente en el origen, se tiene que g restringida a $F(x)$ debe ser positivamente definida.

Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $F(x)$ con respecto al producto interno g . Entonces $\{e_1, e_2, x\}$ es una base g -ortonormal, es decir

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$$(2.94) \quad g(x, e_i) = 0; \quad i = 1, 2$$

$$g(x, x) = -1$$

Luego, se tiene el siguiente:

2.95. LEMA. Para todo x tal que $g(x) = -1$, existen e_1 y e_2 tales que $\{e_1, e_2, x\}$ es una base g -ortonormal en el sentido de que satisface (2.94).

Ahora podemos probar fácilmente que $P(Q)$ y $P_+(Q)$ actúan transitivamente en $i(Q)$. Si $a, b \in i(Q)$, entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\pi(x_1) = a$, $\pi(x_2) = b$; $g(x_1) = g(x_2) = -1$; además, existen vectores e_1, e_2, f_1, f_2 tales que $\{e_1, e_2, x_1\}$ y $\{f_1, f_2, x_2\}$ son bases g -ortonormales de \mathbb{R}^3 . Si $B \in GL(3, \mathbb{R})$ es la transformación lineal tal que $B(e_i) = f_i$, $B(x_1) = x_2$; $i = 1, 2$, entonces B preserva la forma cuadrática g y, por lo tanto, su proyectivización \hat{B} preserva Q y $\hat{B}(a) = b$. Renumerando e_1 y e_2 se puede hacer que \hat{B} preserve o invierta la orientación de $i(Q)$.

Pasemos a demostrar que $P_+(Q)$ y $P(Q)$ actúan transitivamente en el conjunto de líneas no euclidianas en el modelo en discusión. Sean $a, b \in i(Q)$ puntos distintos y sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ dos puntos que se proyectan en a y b , respectivamente, y tales que $g(x) = g(y) = -1$. Sea $F(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^3; g(z, x) = g(z, y) = 0\}$. Evidentemente, x, y , deben ser linealmente independientes y generan un subespacio de \mathbb{R}^3 , $E(x, y)$, tal que la signatura de g restringida a $E(x, y)$ es $(+, -)$. El teorema de Sylvester implica que $F(x, y)$

es de dimensión uno y $g(z) > 0$ para todo $z \in F(x,y)$, $z \neq 0$. Otra vez, es geoméricamente obvio $F(x,y)$ es la recta que se obtiene al reflejar, con respecto al plano (x,y) , la recta que pasa por el origen y que es perpendicular (en el sentido euclidiano) al plano $E(x,y)$. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para productos internos indefinidos implica que existe una base, $\{e_1, e_2\}$, de $E(x,y)$ que es g -ortonormal, es decir, tal que

$$g(e_1, e_1) = -1$$

$$g(e_2, e_2) = 1$$

$$g(e_1, e_2) = 0.$$

Sea $z \in F(x,y)$ tal que $g(z) = 1$. Luego, $\{e_1, e_2, z\}$ es una base g -ortonormal. De lo anterior se sigue:

2.96. LEMA. Sean F_1 y F_2 dos subespacios de \mathbb{R}^3 tales que g restringida a F_1 y F_2 sean de tipo $(+,-)$. Entonces existen bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{f_1, f_2, f_3\}$ tales que $\{e_1, e_2\}$ es base de F_1 , $\{f_1, f_2\}$ es base de F_2 y tales que ambas son g -ortonormales:

$$g(e_i, e_j) = g(f_i, f_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$g(e_1) = g(f_1) = -1$$

$$g(e_2) = g(f_2) = g(e_3) = g(f_3) = 1.$$

Este lema implica la transitividad de $P_+(Q)$ y $P(Q)$ en el conjunto de

rectas no euclidianas, ya que dos rectas determinan dos subespacios de \mathbb{R}^3 como los del enunciado del lema 2.96. Basta tomar la proyectivización de las funciones lineales que se obtienen de las correspondencias $e_i \leftrightarrow f_i$, o bien, $e_1 \leftrightarrow f_1$, $e_2 \leftrightarrow f_3$, $e_3 \leftrightarrow f_2$.

2.97. Dualidad.

Un plano de \mathbb{R}^3 se proyecta, bajo π , a una recta tangente a la cónica Q si y solo si el plano es tangente al cono $C: x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Por "tangente" entendemos que el plano contiene a una recta generatriz del cono. Ya que el ángulo del cono en el origen es $\frac{\pi}{2}$, para que un plano que pasa por el origen sea tangente al cono es necesario y suficiente que su complemento ortogonal (en el sentido euclidiano) sea una generatriz del cono. Analíticamente, esto lo podemos expresar así: Si $ax + by + cz = 0$ es la ecuación del plano P , entonces P es tangente a C si y solamente si $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Si P corta al cono C solamente en el origen entonces su complemento ortogonal queda "adentro" del cono. Analíticamente: $P \cap C = \{0\} \leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 < 0$. Por último, el plano P corta al cono C en dos generatrices distintas si y solamente si su complemento ortogonal queda "afuera" del cono. Analíticamente: P corta a C en dos generatrices distintas $\leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Estas tres posiciones relativas de P se traducen a las tres posibilidades de una recta, con respecto a la cónica Q . La recta puede ser tangente, ajena o cortar en dos puntos a Q (ver Figura 33, en la que tenemos una versión bidimensional de C y P).

La clarificación del concepto de dualidad se la debemos a Plücker y aquí vamos a usar algunas de sus ideas para interpretar perpendicularidad

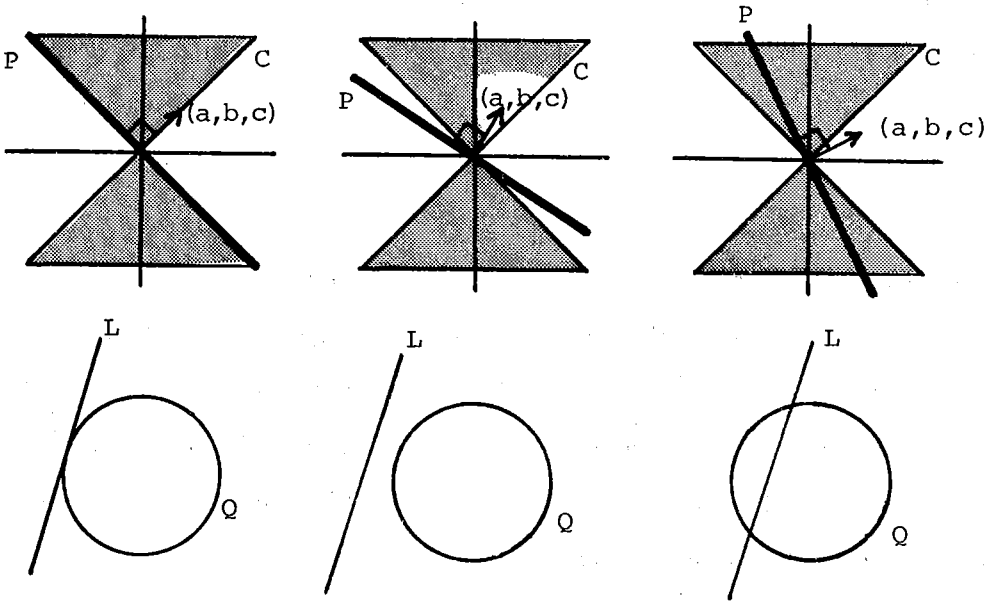


Fig. 33

en el modelo proyectivo de la geometría no euclidiana. La biyección $L \leftrightarrow \perp L$ entre rectas que pasan por el origen y planos que pasan por el origen, que asigna a cada recta L su complemento ortogonal $\perp L$, puede ser descrita analíticamente así: a la recta que pasa por $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y el origen se le asigna el plano cuya ecuación es $ax + by + cz = 0$. De ésta vemos que el conjunto de rectas proyectivas se puede parametrizar con \mathbb{P}^2 mismo. Las coordenadas proyectivas $(a:b:c)$ se llaman las coordenadas de Plücker de la recta proyectiva que corresponde al plano cuya ecuación es $ax + by + cz = 0$. De los comentarios anteriores se tiene un criterio para determinar si una recta proyectiva es tangente, corta en dos puntos o no corta a la cónica Q en términos de las coordenadas de Plücker de la recta.

Si $a, b \in i(Q)$ son puntos distintos que determinan una recta no eucli-

diana L , sea $E(x,y)$ el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por x, y , donde $\pi(x) = a$, $\pi(y) = b$. Por lo que se vió en el curso de la demostración de la proposición 2.92 existe exactamente un vector, \bar{z} , tal que \bar{z} es g -ortogonal a $E(x,y)$ y tal que $g(\bar{z}) = g(-\bar{z}) = 1$. Por lo tanto tenemos:

2.98. PROPOSICION. Existe una correspondencia biyectiva entre las rectas no euclidianas en el modelo proyectivo que corresponde a la cónica Q y las parejas de puntos $(\bar{z}, -\bar{z})$ en \mathbb{R}^3 tales que $g(\bar{z}) = g(-\bar{z}) = 1$, es decir, \bar{z} y $-\bar{z}$ pertenecen a la superficie de nivel $C(1)$, donde $C(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Por lo tanto, existe una biyección entre las rectas no euclidianas y los puntos de $e(Q)$.

La proposición 2.98 nos dice que podemos interpretar al conjunto de rectas no euclidianas con los puntos de $e(Q)$ y por lo tanto el conjunto de rectas no euclidianas se puede parametrizar de manera natural con una cinta de Moebius.

Por el otro lado, si L es una recta proyectiva que no corta a Q , entonces L corresponde a un plano que corta a C solamente en el origen. El subespacio de \mathbb{R}^3 que es g -ortogonal a este plano es una recta que corresponde a un punto en $i(Q)$. Luego, se tiene:

2.99. PROPOSICION. Existe una biyección entre las rectas que no cortan a Q y los puntos de $i(Q)$.

Claramente, las rectas tangentes a Q están en correspondencia biyectiva

con los puntos de Q misma (en la forma obvia).

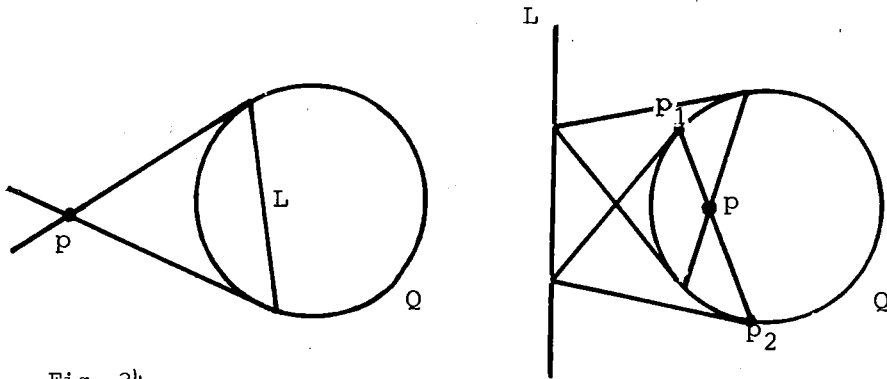


Fig. 34

Polos y Polares

Si $p \in i(Q)$ entonces la recta exterior a Q que corresponde a p se llama la recta polar de p . Si L es una recta no euclidiana entonces el punto $p \in e(Q)$, que corresponde a L se llama el polo de L (ver Figura 34).

Con los ingredientes que hemos visto hasta el momento el lector puede demostrar la siguiente:

2.100. PROPOSICION. Sea L la recta no euclidiana que corresponde a la recta proyectiva que corta a Q en los puntos distintos p_1 y p_2 . Entonces, el polo de L es el punto de intersección de las rectas tangentes a Q en los puntos p_1 y p_2 . Sea L la recta polar que corresponde al punto $p \in i(Q)$. Entonces L es el lugar geométrico de los polos de las rectas no euclidianas que pasan por p .

Aunque no hemos introducido aún una noción de distancia y una manera de medir ángulos, sabemos que de los axiomas de Hilbert es posible hacerlo

(y nosotros lo vamos a hacer más adelante), sin embargo, podemos ver ya lo siguiente:

2.101. Sea L una recta no euclidiana, en el modelo en discusión, que corresponde a la recta proyectiva que corta a Q en los puntos distintos p_1 y p_2 . Sea p el polo de L . Entonces para cada $q \in L$ existe $A \in P(Q)$ tal que A fija a todos los puntos de la recta proyectiva que pasa por p y q y tal que $A(p_1) = p_2$, $A(p_2) = p_1$.

La demostración de la afirmación 2.101 es muy sencilla. Se puede suponer que q es la proyección, bajo π , del eje z y que la recta L corresponde al plano (y,z) . Luego, el polo p corresponde al eje x . La transformación lineal

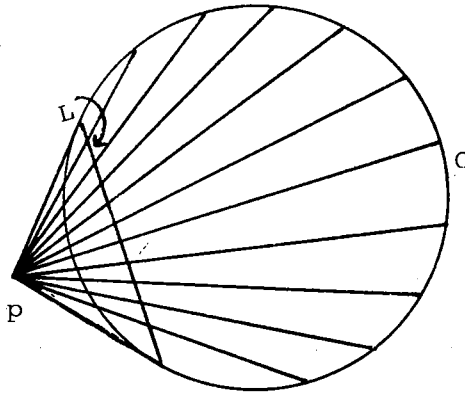
$$(x,y,z) \mapsto (x,-y,z),$$

induce una transformación proyectiva que satisface las hipótesis cuando L y q están en esta posición especial. El caso en el que L y $q \in L$ están en posición arbitraria se sigue de la transitividad de $P(Q)$ en las parejas (q,L) , donde L es una recta no euclidiana y q es un punto tal que $q \in L$. De la afirmación 2.101 se sigue la siguiente:

2.102. PROPOSICION. Sea m una métrica riemanniana en $i(Q)$ cuyas isometrías consisten del grupo $P(Q)$ y cuyas líneas geodésicas son las rectas no euclidianas en el modelo en discusión (esto último es redundante). Entonces dada una línea geodésica L , cuyo polo es p , el conjunto de líneas geodési-

cas ortogonales a L es el conjunto de rectas no euclidianas que corresponden a rectas proyectivas que pasan por p (ver Figura 35).

Fig. 35



Familia de rectas ortogonales a L

Aunque para construir el modelo proyectivo se puede tomar cualquier cónica no degenerada y no vacía, es conveniente pensar que \mathbb{P}^2 es el plano \mathbb{R}^2 junto con la recta al infinito y que Q es el círculo unitario de \mathbb{R}^2 centrado en el origen. En este caso, el interior de Q es el disco unitario abierto que tiene como frontera a Q y las rectas no euclidianas son los segmentos abiertos que tienen como extremos dos puntos de Q.

En virtud de la proposición 2.102, que relaciona polos y polares con ortogonalidad es conveniente la siguiente:

2.103. Notación.

Si $v \in e(Q)$, sea v^\perp la recta no euclidiana que tiene como polo a v. Si $v \in i(Q)$ sea v^\perp la recta exterior a Q que es la recta polar de v.

2.104. Métrica en el modelo proyectivo.

Sea $\Delta \subset \mathbb{C}$, $\Delta = \{z; |z| < 1\}$ y sea $\phi: \Delta \rightarrow \Delta$ el difeomorfismo definido según la fórmula

$$(2.105) \quad \phi(z) = \frac{2z}{1+|z|^2}.$$

El difeomorfismo inverso ϕ^{-1} es el siguiente:

$$\phi^{-1}(z) = \frac{z}{1+(1-|z|^2)^{1/2}}$$

La función $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $h(x,y) = (x:y:1) \in \mathbb{P}^2$, aplica Δ difeomorficamente sobre $i(Q)$, donde Q es la cónica cuya ecuación es $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. Identifíquese $i(Q)$ con Δ mediante h .

2.106. DEFINICION. La métrica no euclidiana en $i(Q)$ es la métrica riemanniana en $i(Q)$ inducida de la métrica de Poincaré en Δ por el difeomorfismo ϕ . En otras palabras, si $(x_1:y_1:1)$ y $(x_2:y_2:1)$ son dos puntos de $i(Q)$ (es decir $x_1^2 + y_1^2 < 1$, $x_2^2 + y_2^2 < 1$) entonces la distancia D en $i(Q)$ se define según la fórmula

$$D((x_1:y_1:1); (x_2:y_2:1)) = d(\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(w)),$$

donde d designa a la métrica de Poincaré y donde $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$.

Con la métrica D , $i(Q)$ es isométrico al disco de Poincaré y por lo tanto $i(Q)$ es completa y con curvatura constante igual a -1 .

La fórmula (2.105) proviene de una construcción geométrica muy simple. Se considera a \mathbb{C} encajado en \mathbb{R}^3 por medio de la aplicación $x+iy \rightarrow (x,y,0)$ y se toma la proyección estereográfica, desde el punto $(0,0,1)$, de la es-

fera unitaria S , centrada en el origen, sobre el plano (x,y) . La proyección estereográfica aplica conformemente Δ sobre el hemisferio sur de S a quien llamaremos S_- . Sea $\psi: \Delta \rightarrow S_-$ la restricción de la proyección estereográfica a Δ y sea $H: S_- \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de S_- sobre Δ . La aplicación ϕ es la composición $H \circ \psi$ (ver Figura 36).

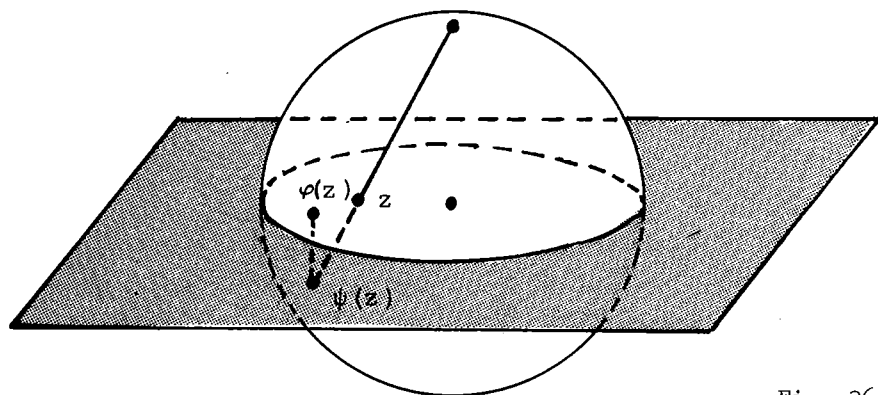


Fig. 36

La proyección estereográfica ψ preserva ángulos y por lo tanto las circunferencias en el plano C que son ortogonales al círculo unitario $\partial\Delta$ se transforman bajo ψ en circunferencias en S que son ortogonales al ecuador, es decir, están en un plano perpendicular a C . Por lo tanto, las líneas geodésicas en Δ con la métrica D son segmentos de recta euclidianos que tienen sus extremos en $\partial D^2 = Q$ (Figura 37).

La función ϕ no es conforme y por lo tanto los ángulos euclidianos que forman dos rectas no necesariamente coincide con el ángulo de la métrica riemanniana inducida por ϕ . De hecho, el único punto de Δ donde la diferencial de ϕ preserva ángulos es el origen.

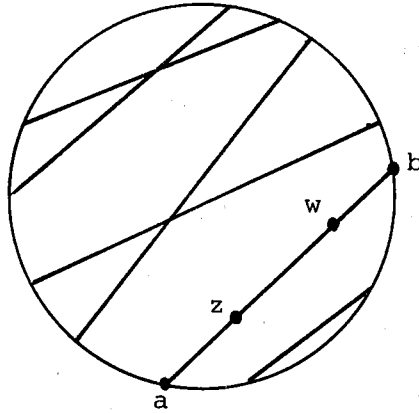


Fig. 37

Rectas no euclidianas
en el modelo proyec-
tivo.

La expresión de la distancia en este modelo es

$$d(z,w) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{|w-a|}{|z-a|} \frac{|b-z|}{|b-w|} \right| ,$$

donde a,b son los puntos ideales que forman el segmento que determina a la recta que pasa por z y q (ver Figura 38).

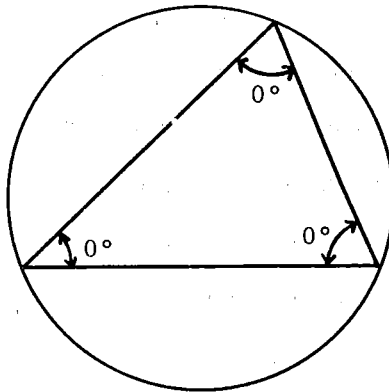


Fig. 38

Angulo no euclidiano
nulo en cada vértice
ideal.

En el modelo proyectivo podemos detectar fácilmente la convexidad de configuraciones puesto que segmentos euclidianos contenidos en Δ son también segmentos no euclidianos.

En particular se tiene:

2.107. PROPOSICION. En el plano hiperbólico todo triángulo es convexo. Más precisamente: todo triángulo hiperbólico es la frontera de un cerrado tal que el segmento de recta hiperbólica que une a cualesquiera dos de sus puntos está contenido en el cerrado.

El interior de todo triángulo ideal también es convexo y de hecho el interior de todo polígono ideal es convexo (cualquier polígono cerrado simple cuyos vértices estén en la adherencia de Δ y cuyos ángulos internos sean menores que π es euclidianamente convexo y, por lo tanto, hiperbólicamente convexo).

Dejamos al lector verificar la siguiente:

2.108. PROPOSICION. El grupo de isometrías de $i(Q)$, con respecto a la métrica D , es el grupo $P(Q)$.

Como consecuencia de (2.102) y (2.108) se tiene:

2.109. COROLARIO. Las rectas perpendiculares a la recta no euclídiana L son las rectas no euclidianas que están determinadas por rectas proyectivas que pasan por L^\perp (el polo de L).

2.110. El modelo del hiperboloide (o de la esfera de radio imaginario).

La construcción de este modelo está implícita en la construcción del

modelo proyectivo. Una vez más, consideremos la forma cuadrática, de tipo indefinido, de \mathbb{R}^3 ,

$$g(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2; \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Denotemos con la misma letra g a la forma bilineal asociada a g ,

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3; \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \bar{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Transladando al origen los vectores tangentes a \mathbb{R}^3 , se tiene que g define una métrica de tipo $(+, +, -)$ en \mathbb{R}^3 . La métrica restringida a un plano afín, cuya ecuación es $ax + by + cz = d$, es definitivamente positiva (es decir es riemanniana) si y solamente si $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. La hoja del hiperboloide $g^{-1}(-1)$ que está contenida en el semiespacio superior la denotaremos con el símbolo $S(-1)$:

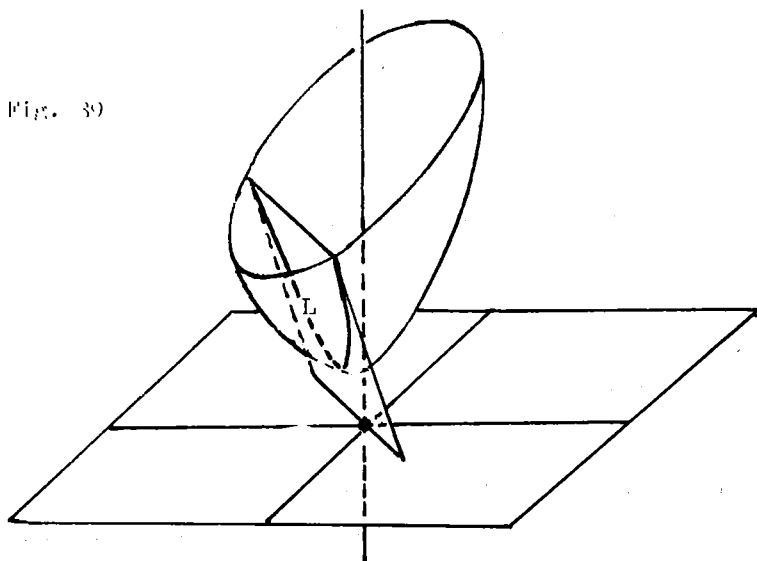
$$S(-1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}.$$

(El hiperboloide completo $g^{-1}(-1)$ puede ser considerado como la esfera unitaria de radio imaginario i con respecto a la "norma" $\|\bar{x}\| = (g(\bar{x}))^{\frac{1}{2}}$. Análogamente, el hiperboloide de una sola hoja $g^{-1}(1)$ puede ser interpretado como la esfera de radio 1, con respecto a la "norma" $\|\cdot\|$.)

2.111. DEFINICION. El modelo del hiperboloide, del plano hiperbólico, es el modelo en el cual los puntos no euclidianos son los puntos de $S(-1)$ y las rectas no euclidianas son las hipérbolas de $S(-1)$ (o mejor dicho las ramas de tales) que se obtienen al intersectar un plano que pasa por el origen con $S(-1)$ (ver Figura 39). Las congruencias en esta geometría son

las restricciones a $S(-1)$ de las transformaciones lineales de \mathbb{R}^3 que fijan, como conjunto, a $S(-1)$.

Fig. 39

Recta hiperbólica L , en el modelo $S(-1)$

Consideremos ahora la métrica riemanniana en $S(-1)$ definida así:

$[\hat{X}, \hat{Y}]_p = g(X, Y)$ donde \hat{X}, \hat{Y} son dos vectores tangentes en un mismo punto p , de $S(-1)$ y X, Y son estos vectores trasladado al origen. El plano tangente a $S(-1)$ en el punto (x_1, x_2, x_3) es perpendicular al vector $(x_1, x_2, -x_3)$ y por lo tanto el producto escalar $[\cdot, \cdot]_p$ es positivamente definido para todo $p \in S(-1)$.

Notemos ahora que si $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pertenece a $S(-1)$ y si X, Y son vectores tangentes a $S(-1)$ en \bar{x} (trasladados al origen) entonces (X, Y, \bar{x}) es una base g -ortonormal. La conexión riemanniana compatible con la métrica en $S(-1)$ se obtiene de la conexión de \mathbb{R}^3 considerado éste como variedad semiriemanniana con la métrica indefinida g . Sea $\bar{D}_X(y)$ la derivada cova-

riante de la conexión en \mathbb{R}^3 , con respecto a la métrica g , de los campos vectoriales X y Y . La conexión \bar{D} define la derivada covariante de dos campos vectoriales tangentes a $S(-1)$ y satisface para cualesquier pareja X, Y de campos vectoriales a $S(-1)$:

$$\bar{D}_X(Y) = D_X(Y) + N(X, Y),$$

donde $N(X, Y)$ es la componente g -perpendicular y $D_X(Y)$ la componente tangencial, de $\bar{D}_X(Y)$. (Esto se puede ver en el libro: "Differential Geometry", Noel J. Hicks, Van Nostrand Mathematical Studies #3, pág. 75, fórmula (9)).

De lo anterior se sigue:

2.112. Una curva $\gamma: (a, b) \rightarrow S(-1)$, diferenciable, parametriza a un segmento de geodésica si y solo si $\ddot{\gamma}(t)$ es proporcional a $\gamma(t)$ (es decir, si $\ddot{\gamma}(t)$ es g -ortogonal a $S(-1)$).

Ya que todos los planos que pasan por el origen y que tocan a $S(-1)$ lo cortan ortogonalmente obtenemos:

2.113. PROPOSICION. Las ramas de hipérbola que son intersección de planos que pasan por el origen con $S(-1)$ son líneas geodésicas de $S(-1)$ con respecto a la métrica en discusión.

La demostración de la proposición (2.92) demuestra también lo siguiente:

2.114. PROPOSICION. Sea $O(3, 2) \subseteq GL(3, \mathbb{R})$ el subgrupo de las transformaciones lineales que preservan la forma cuadrática g y que aplican $S(-1)$ sobre el mismo. Entonces $\hat{O}(3, 2)$ actúa transitivamente en $S(-1)$ y en el con-

junto de líneas geodésicas de $S(-1)$. El grupo $O(3,2)$ se llama el grupo ortogonal positivo de tipo $(3,2)$ (es un subgrupo de índice dos del grupo de transformaciones lineales que preservan la forma cuadrática g de tipo $(+,+,-)$).

Si J denota a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\hat{O}(3,2) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}); A^T J A = J \text{ y } g(x) > 0 \Rightarrow g(A(x)) > 0\}.$$

Siguiendo la rutina de siempre, para encontrar a todas las geodésicas nos basta encontrar una y después, usando la transitividad de isometrías, encontrar las demás. Sabemos que la rama de hipérbola

$$L = \{(x,y,z); x^2 - z^2 = -1, y = 0, z > 0\}$$

es una línea geodésica y no hay nada más natural para parametrizarla que las funciones seno y coseno hiperbólicos.

2.115. AFIRMACION. La curva $\gamma(t) = (\text{sen } ht, 0, \text{cos } ht)$ es una geodésica, parametrizada con su longitud de arco, de $S(-1)$.

DEMOSTRACION. La imagen de γ es una línea geodésica por lo tanto basta de-

mostrar que $g(\dot{\gamma}(t)) = 1$ lo cual se sigue de la identidad $\cosh^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1$.

La función $\psi: \Delta \rightarrow S(-1)$ definida así:

$$(2.116) \quad \psi(z) = \left(\frac{2z}{1-|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1-|z|^2} \right)$$

(identificando $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ con \mathbb{R}^3), es una isometría del disco de Poincaré con $S(-1)$. Dejamos al lector el placer de hacer los cálculos pertinentes.

Luego, se tiene:

2.117. PROPOSICION. Con la métrica en discusión, $S(-1)$ es una variedad riemanniana completa.

La función (2.116) se construyó así: se identifica Δ con el disco $D = \{(x,y,1); x^2 + y^2 < 1\}$ y se proyecta radialmente, desde el origen, este disco sobre $S(-1)$ (ver Figura 40). La identificación de Δ con Δ es

$$f(z) = \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, 1 \right).$$

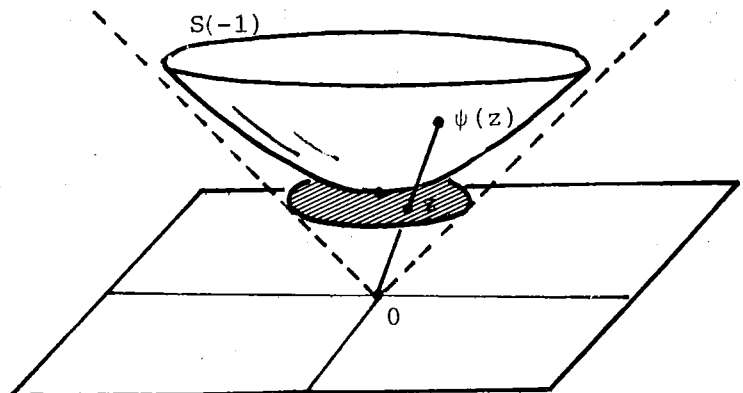


Fig. 40

2.118. Fórmulas trigonométricas en la geometría hiperbólica plana.

Usaremos el modelo $S(-1)$ para encontrar fórmulas trigonométricas. En el transcurso de la construcción del modelo proyectivo vimos que cada punto $x \in S(1)$ determina unívocamente al subespacio de \mathbb{R}^3 que es g -ortogonal a x . También vimos que la forma cuadrática g debe ser de tipo $(+,-)$ cuando la restringimos a este plano. Luego, el plano determina a una recta no euclidiana, puesto que el plano debe cortar a $S(-1)$. Por el otro lado, vemos que la construcción recíproca es posible: Cada recta no euclidiana determina a una pareja $x, -x$ de puntos en $S(1)$. Si orientamos a la recta no euclidiana L , esto corresponde a orientar al plano que determina a la recta y se puede escoger a x ó $-x$ según (e_1, e_2, x) sea una base positivamente orientada de \mathbb{R}^3 , $((e_1, e_2)$ es una base positivamente orientada del plano que determina a L). La proyección $\pi: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ encaja a $S(1)$ y $S(-1)$ en el exterior e interior de la cónica Q que ya se ha discutido tanto. Los dibujos que ilustran las fórmulas trigonométricas los supondremos encajados en \mathbb{P}^2 , vía π .

Escribamos, para simplificar $g(X, Y) = X \cdot Y; X, Y \in \mathbb{R}^3$. Denotemos con el símbolo $\|X\|$, la raíz cuadrada de $g(X) = X \cdot X$ con la convención de que si $g(X)$ es negativo, entonces $\|X\|$ debe ser imaginario positivo. Entonces con esta notación

$$S(1) = \{X; \|X\| = 1\} \text{ y } S(-1) = \{X = (x_1, x_2, x_3); \|X\| = i, x_3 > 0\}.$$

Es fácil ver (usando el campo gradiente de la forma cuadrática g) que el producto interno inducido por g en $S(1)$ es indefinido de tipo $(+,-)$.

Definamos la siguiente función con dominio en $S(1) \cup S(-1)$

res reales o imaginarios puros:

$$(2.119) \quad c(X,Y) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$$

Notamos que $c(-X,Y) = -c(X,Y)$ cuando $X \in S(1)$ y que $c(X,X) = 1$ para todo X . La fórmula (2.119) está motivada por la definición del coseno del ángulo entre dos vectores para métricas positivamente definidas. Para cada $X \in S(1)$ sea X^\perp la recta no euclidiana dada por la correspondencia citada antes (X es el polo de X^\perp).

2.120. PROPOSICION. Sean X, Y dos puntos distintos de $S(1)$. Entonces:

- 1) $c(X,Y)^2 < 1 \leftrightarrow X^\perp$ y Y^\perp son rectas no euclidianas que se cortan.
- 2) $c(X,Y)^2 > 1 \leftrightarrow X^\perp$ y Y^\perp son rectas no euclidianas que son antiparalelas, es decir, no se cortan y tienen una perpendicular común.
- 3) $c(X,Y)^2 = 1 \leftrightarrow X^\perp$ y Y^\perp son paralelas, es decir, representan a geodésicas positivamente asintóticas.

DEMOSTRACION. Ya habíamos visto que el producto interno de tipo indefinido $g(X,Y) = X \cdot Y$ está relacionado con el producto euclidiano, usual, $[X,Y]$ de una manera muy simple:

$$X \cdot Y = [X, J(Y)].$$

donde $J: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la involución lineal de \mathbb{R}^3 definida así:

$$J(x,y,z) = (x,y,-z).$$

Si $X \in S(1)$ entonces la recta no euclidiana X^\perp se obtiene de la manera

siguiente: Sea $P(X)$ el subespacio bidimensional de \mathbb{R}^3 que es euclidianamente perpendicular a X , entonces $J(P(X)) \cap S(-1)$ es la recta no euclidiana X^\perp . Ahora bién, si $X, Y \in S(1)$, entonces $P(X)$ y $P(Y)$ se intersecan en una recta euclidiana L paralela a $X \times Y$, donde " \times " es el producto vectorial euclidiano (o producto "cruz") de X y Y . Luego, X^\perp y Y^\perp se intersecan en $S(-1)$, si y solo si L interseca a $S(-1)$ es decir, si y solo si $\|X \times Y\|^2 < 0$. Por el otro lado, X^\perp y Y^\perp son paralelas si y solo si L es una generatriz del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, es decir, X^\perp y Y^\perp son paralelas si y solo si L interseca a $S(1)$, es decir si y solo si $\|X \times Y\|^2 > 0$.

De las fórmulas del producto vectorial tenemos:

$$\begin{aligned} \|X \times Y\|^2 &= (X \times Y) \cdot (X \times Y) = [X \times Y, J(X \times Y)] = \\ &= -[X \times Y, J(X) \times J(Y)] = -[X, J(X)][Y, J(Y)] + [X, J(Y)]^2 = \\ &= -\|X\|^2 \|Y\|^2 + (X \cdot Y)^2, \end{aligned}$$

es decir, se tiene la fórmula

$$(2.121) \quad \|X \times Y\|^2 = -\|X\|^2 \|Y\|^2 + (X \cdot Y)^2.$$

Si X y Y pertenecen a $S(1)$, tenemos:

$$\|X \times Y\|^2 = -1 + (X \cdot Y)^2 = -1 + C(X, Y)^2,$$

y de lo anterior se sigue la proposición.

2.122. PROPOSICION. Si X y Y pertenecen a $S(1)$, entonces si $C^2(X, Y) < 1$ se tiene:

$$(2.123) \quad X \cdot Y = C(X, Y) = \cos \angle (X, Y) = -\cos \angle (X^\perp, Y^\perp)$$

donde $\cos \angle (X^\perp, Y^\perp)$ es el coseno del ángulo que forman las rectas X^\perp y Y^\perp (orientadas según X y Y) en su punto de intersección.

DEMOSTRACION. Sea $p = (x, y, z) \in S(-1)$ el punto de intersección de X^\perp con Y^\perp , entonces el plano tangente a $S(-1)$, en el punto p , se obtiene trasladando el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por X y Y al punto p (ya que el vector euclidianamente perpendicular a este plano tangente es $J(p) = (x, y, -z)$). Por lo tanto si se trasladan paralelamente hasta p los vectores X y Y , estos son tangentes a las rectas X^\perp y Y^\perp en el punto p . (Q.E.D.)

2.124. PROPOSICION. Si X y Y pertenecen a $S(-1)$ entonces

$$(2.125) \quad C(X, Y) = \cosh[d(X, Y)]; \quad (d = \text{distancia hiperbólica de } S(-1)).$$

DEMOSTRACION. Ya vimos que el plano euclidiano generado por X y Y corta a $S(-1)$ en una línea geodésica que pasa por X y Y y que una parametrización por su longitud de arco, $\gamma(t)$, satisface que $\ddot{\gamma}(t)$ y $\dot{\gamma}(t)$ son linealmente dependientes, además ya que $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$ se sigue inmediatamente que $\gamma(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial vectorial:

$$\ddot{\gamma} - \gamma = 0,$$

con las condiciones

$$\begin{cases} \gamma(0) = X \\ \gamma(d(X, Y)) = Y. \end{cases}$$

La función $\beta(t) = -\langle X, \gamma(t) \rangle$ satisface la ecuación diferencial escalar

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$

Luego, $\beta(t) = \cos ht$ y, por lo tanto

$$C(X, Y) = \beta(d(X, Y)) = \cos h(d(X, Y)). \quad (\text{Q.E.D.})$$

2.126. PROPOSICION. Si X y Y pertenecen a $S(1)$ y si $C(X, Y) > 1$, entonces

$$(2.127) \quad C(X, Y) = \pm \cos h(d(X^\perp, Y^\perp)).$$

DEMOSTRACION. Considere a $S(1)$ con su métrica indefinida inducida en su haz tangente por g (es decir, considerécese a $S(1)$ como variedad semi-riemanniana). Si $\gamma(t)$ es una geodésica en $S(1)$, entonces la imagen de $\gamma(t)$ está contenida en un plano que pasa por el origen y satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{\gamma} + \gamma = 0.$$

Si $\gamma(t)$, además, tiene "velocidad 1" y une a X con Y , se tiene que $\gamma(t)$ debe de satisfacer:

$$(*) \quad \begin{cases} \ddot{\gamma} + \gamma = 0 \\ \gamma(0) = X \\ \gamma(S) = Y \text{ para algún } S > 0 \\ \|\dot{\gamma}(0)\| = 1. \end{cases}$$

Sea $[X, Y]$ el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por X y Y . La ecuación (*) tiene solución solamente cuando X y Y quedan en la misma rama de $S(1) \cap [X, Y]$ (esta intersección es una hipérbola y sus dos ramas son líneas geodésicas de $S(1)$). Tomando $-X$ en lugar de X se puede suponer que (*) tiene solución. Sea $\beta(t)$ la geodésica de $S(-1)$, que une a los pies de la perpendicular común de X^\perp a Y^\perp .

Si $u(t) = \gamma(t) \cdot \beta(t)$ entonces $u(t) = 0$ para todo real t (el lector puede verificar esto derivando). Se tiene

$$u(0) = X \cdot \beta(0) = 0$$

$$u(s) = \gamma(s) \cdot \beta(s) = Y \cdot \beta(s) = 0$$

luego, $\beta(s)$ es el pie de la perpendicular común, a Y y $s = d(X^\perp, Y^\perp)$. Por el otro lado, la función escalar:

$$v(t) = i(X \cdot \gamma(t))$$

satisface

$$\begin{cases} \ddot{v} + v = 0 \\ v(0) = i \\ v(d(X^\perp, Y^\perp)) = iC(X, Y) \end{cases}$$

luego

$$(2.128) \quad C(X, Y) = \pm \cos h[d(X^\perp, Y^\perp)]. \quad \text{Q.E.D.}$$

Un razonamiento análogo implica la siguiente:

2.129. PROPOSICION. Si $X \in S(-1)$ y $Y \in S(1)$, entonces

$$(2.130) \quad c(X, Y) = \pm \frac{\operatorname{sen} h(d(X, Y^\perp))}{i} .$$

Ahora derivamos las fórmulas trigonométricas principales de la geometría hiperbólica.

2.131. DEFINICION. Si $V \in S(1) \cup S(-1)$ y V es g -ortogonal a una pareja $V_1, V_2 \in S(1) \cup S(-1)$, decimos que V es dual a (V_1, V_2) .

Si V_1, V_2 son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 y si pertenecen a $S(1) \cup S(-1)$, entonces un elemento V dual a (V_1, V_2) (salvo signo sólo hay un elemento dual) se calcula muy fácilmente:

$$(2.132) \quad V = \pm \|J(V_1 \times V_2)\|^{-1} J(V_1 \times V_2) \\ = \frac{\pm J(V_1 \times V_2)}{\sqrt{(V_1 \times V_2)^2 - 1}}$$

2.133. PROPOSICION. Si V es dual a (V_1, V_2) , entonces:

- i) Si $V_1, V_2 \in S(-1)$ entonces $V \in S(1)$ y V^\perp es la recta que une a V_1 con V_2 .
- ii) Si $V_1, V_2 \in S(1)$ entonces $V \in S(-1)$ y V es la intersección de V_1^\perp y V_2^\perp .
- iii) Si $V_1 \in S(1)$ y $V_2 \in S(2)$ entonces $V \in S(1)$ y V^\perp es la perpendicular de V_2 a V_1^\perp .

Esta proposición se verifica en base a la discusión geométrica sobre la Figura 33. Dada una base (V_1, V_2, V_3) se puede construir muy fácilmente una base dual (V^1, V^2, V^3) , donde V^i es dual a (V_j, V_k) para $i, j, k = 1, 2, 3$ en cualquier orden. Luego se puede interpretar sus elementos según la proposición 2.133. Para hacer trigonometría hiperbólica, necesitamos la siguiente:

2.134. PROPOSICION. Sea (V_1, V_2, V_3) como antes y (V^1, V^2, V^3) una base dual. Sea $c_{ij} = c(V_i, V_j)$ y $c^{ij} = c(V^i, V^j)$ ($j = 1, 2, 3$). Entonces

$$(2.135) \quad c^{12} = \pm \frac{c_{13}c_{23} - c_{12}}{\sqrt{1 \pm c_{13}^2} \sqrt{1 \pm c_{23}^2}}$$

DEMOSTRACION. Tenemos:

$$c^{12} = c(V^1, V^2) = \pm \frac{J(V_2 \times V_3) \cdot J(V_1 \times V_3)}{\|J(V_2 \times V_3)\| \|J(V_1 \times V_3)\|}$$

Luego,

$$c^{12} = \pm \frac{[V_2 \times V_3, J(V_1 \times V_3)]}{\sqrt{(V_1 \cdot V_3)^2 - 1} \sqrt{(V_2 \cdot V_3)^2 - 1}}$$

Recordamos ahora la fórmula del producto vectorial siguiente:

$$[a \times b, v \times c] = [a, b] \times [b, c] - [a, c] \times [b, b]$$

y tenemos

$$[J(a \times b), J(b \times c)] = (a \cdot c)(b \cdot b) - (a \cdot b)(b \cdot c).$$

Usando esta fórmula se obtiene de inmediato la fórmula (2.135).

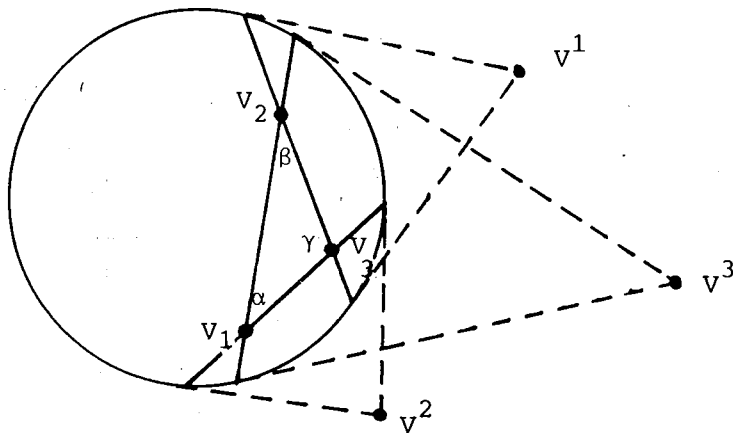
APLICACIONES. 1) Si (V_1, V_2, V_3) es una base y $V_1, V_2, V_3 \in S(-1)$, entonces una base dual (V^1, V^2, V^3) satisface $V^i \in S(1)$ ($i = 1, 2, 3$) y $(V^i)^\perp$ es el lado que pasa por V_j y V_k ($j, k \neq i$) del triángulo cuyos vértices son V_1, V_2 y V_3 .

Por la fórmula (2.135) y las fórmulas anteriores tenemos; eligiendo parejas de $(V_1, V_2, V_3, V^1, V^2, V^3)$:

$$(2.136) \quad \cosh C = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

donde los ángulos y lados son aquellos del siguiente diagrama (Figura 41).

Fig. 41



también se tiene:

$$(2.137) \quad \cos \gamma = \frac{\cosh A \cosh B \cosh C}{\sinh A \sinh B}$$

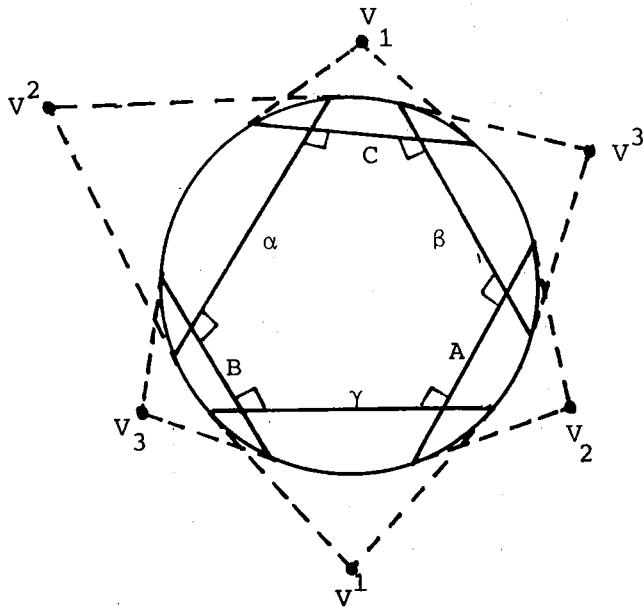
luego

$$(2.138) \quad \cosh C = \cosh A \cosh B - \sinh A \sinh B \cos \gamma.$$

2) Supóngase que (V_1, V_2, V_3) es una base de \mathbb{R}^3 y que $v_i \in S(1)$, $i = 1, 2, 3$. Supóngase, además, que la base dual (V^1, V^2, V^3) satisface que $V^i \in S(1)$ ($i = 1, 2, 3$). Entonces $(V_1^\perp, V_2^\perp, V_3^\perp, (V^1)^\perp, (V^2)^\perp, (V^3)^\perp)$ son rectas hiperbólicas que forman los lados de un hexágono con todos sus ángulos rectos y se tiene:

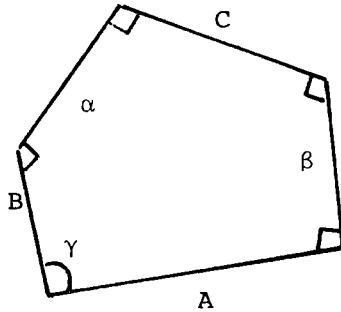
$$(2.139) \quad \cosh C = \frac{\cosh \alpha \cosh \beta + \cosh \gamma}{\sinh \alpha \sinh \beta}$$

Fig. 42



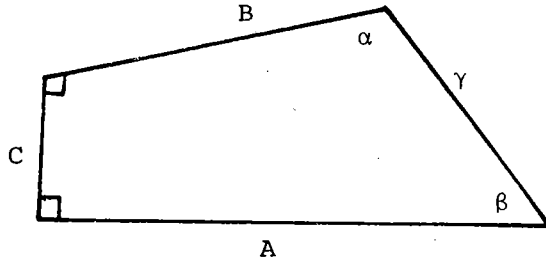
El lector podrá fácilmente obtener fórmulas para pentágonos con todos sus ángulos rectos, excepto uno:

Fig. 43



o bien para cuadrilátero con ángulos rectos adyacentes:

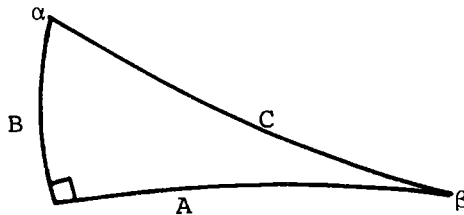
Fig. 44



Todas estas fórmulas se obtienen según la posición de una base y su dual.

La fórmula 2.136 implica que para un triángulo hiperbólico con un ángulo recto, la siguiente fórmula es válida:

Fig. 45



$$(2.140) \quad \cosh C = \cosh A \cosh B$$

La fórmula (2.140) es el Teorema de Pitágoras hiperbólico. Por lo tanto en cualquier triángulo hiperbólico se tiene:

$$(2.141) \quad \frac{\sinh A}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sinh B}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\sinh C}{\operatorname{sen} \gamma}$$

La fórmula (2.141) se llama la ley de los senos y se demuestra descomponiendo un triángulo en dos triángulos rectángulos.

3. GEOMETRIA HIPERBOLICA n-DIMENSIONAL.

Los modelos de la geometría hiperbólica n-dimensional son variedades riemannianas con curvatura seccional constante -1 , y todas son difeomorfas a un disco abierto de \mathbb{R}^n . Todos los modelos y la expresión de sus métricas son generalizaciones naturales de los modelos bidimensionales. Los elementos lineales de la geometría son las subvariedades totalmente geodésicas completas, es decir, subvariedades completas tales que una geodésica en la subvariedad (con respecto a la métrica inducida) es también una geodésica del espacio ambiente. Empezaremos con el modelo del disco de Poincaré:

3.1. Modelo del disco de Poincaré.

Sea $D^n \subset \mathbb{R}^n$ el disco unitario abierto:

$$D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}.$$

Sea $\partial D^n = S^{n-1}$, la frontera de D^n :

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Dotemos a D^n con la métrica de Poincaré:

$$(3.2) \quad ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)}{(1 - \|x\|^2)^2},$$

donde $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

3.3. DEFINICION. D^n provisto con la métrica (3.2) se llama el disco de Poincaré n-dimensional.

De una manera análoga al caso bidimensional se demuestra que los diámetros de D^n son líneas geodésicas de D^n . La métrica (3.2) es proporcional a la métrica euclidiana (es decir, la métrica es conforme), luego, los ángulos que forman dos subvariedades en un punto común coincide con el ángulo euclidiano. El factor de proporcionalidad $(1-\|x\|^2)^2$ es una función de la norma euclidiana y por tanto este factor es invariante bajo el grupo de las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^n . De la afirmación anterior se sigue que las transformaciones ortogonales se restringen a isometrías de D^n .
El disco bidimensional

$$\Delta = \{(x, y, 0, \dots, 0); x^2 + y^2 < 1\}$$

es isométrico al disco de Poincaré bidimensional. Análogamente, los discos de dimensión $k > 2$, contenidos en D^n , definidos así:

$$\Delta_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0); x_1^2 + \dots + x_k^2 < 1\}$$

son isométricos al disco de Poincaré de dimensión k . Si

$$T: D^n \rightarrow D^n,$$

es la función

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n),$$

entonces, T tiene como conjunto de puntos fijos a Δ_{n-1} y es una isometría

de Δ_{n-1} , por lo tanto, una geodésica que tenga como dato inicial un vector tangente a Δ_{n-1} , en cualquier punto de Δ_{n-1} , debe tener su imagen enteramente contenida en Δ_{n-1} (ya que si no ocurriese esto la geodésica y su imagen serían dos geodésicas distintas con un vector tangente común). Se tiene, así, que Δ_{n-1} debe ser totalmente geodésico. Inductivamente vemos que Δ_k debe ser totalmente geodésico cuando $1 \leq k \leq n$.

Posteriormente veremos que el grupo de isometrías de D^n actúa transitivamente en D^n . Si se supone esto, se tiene la siguiente:

3.4. PROPOSICION. El disco de Poincaré D^n con la métrica (3.2) es una variedad riemanniana completa con curvatura seccional constante -1. Las líneas geodésicas de D^n son los círculos ortogonales a S^{n-1} .

DEMOSTRACION. Ya que el grupo ortogonal actúa también como grupo de isometrías del disco de Poincaré con la métrica (3.2), se sigue que si P es un subespacio de dimensión dos entonces $P \subseteq D^n$ es isométrico al disco de Poincaré bidimensional y es totalmente geodésico. Luego, la curvatura seccional de D^n en el origen es constante e igual a -1. Si el grupo de isometrías de D^n actúa transitivamente en D^n , se sigue que D^n tiene curvatura seccional constante -1 en todo punto de D^n . Si V es un vector tangente a D^n en cualquier punto, entonces V es tangente a un plano P que pasa por el origen. Luego, la geodésica que tiene como dato inicial a V tiene como imagen un arco de un círculo euclidiano contenido en P y ortogonal a S^{n-1} .

Sea $I(D^n)$ el grupo de isometrías de D^n . Este grupo es el grupo de las transformaciones de Moebius n -dimensionales que preservan a D^n (es decir,

los difeomorfismos que preservan ángulos). Si se considera a D^n encajado en \mathbb{R}^{n+1} y se proyecta estereográficamente a D^n sobre el hemisferio sur de S^n , desde el polo norte $N = (0, \dots, 1)$, entonces $I(D^n)$ es el grupo de transformaciones de Moebius que preservan al hemisferio sur (ver Figura 46).

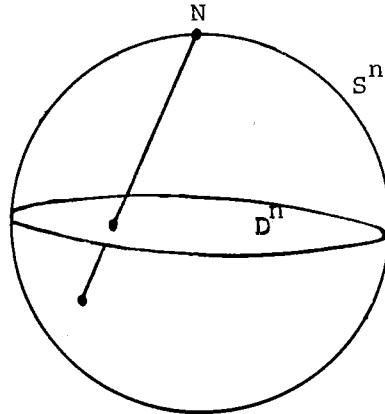


Fig. 46

La transformación $T: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ definida mediante la fórmula

$$T(x) = x + \frac{\|z\|^2 - 1}{\|x - z\|^2} (x - z),$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| > 1$, $T(z) = \infty$, $T(\infty) = z$, es una inversión, en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = S^n$, con respecto a la esfera de \mathbb{R}^n centrada en z y de radio $(\|z\|^2 - 1)^{1/2}$. Esta esfera es ortogonal a S^{n-1} y por tanto la transformación T preserva al disco unitario (inversiones en esferas preservan ángulos y mandan esferas en esferas, luego S^{n-1} es preservada y es fácil ver, ya que z es exterior a S^{n-1} , que el disco unitario es preservado). Toda transformación de Moebius es una composición de inversiones en esferas y las transformaciones de Moebius que preservan orientación son la composición de un número

par de inversiones en esferas. Ya que es posible expresar la distancia hiperbólica, entre dos puntos de D^n , como función de una razón doble entre cuatro puntos contenidos en un círculo y como las inversiones preservan la razón doble de cuatro puntos cocíclicos, se sigue que inversiones en esferas que preservan a S^{n-1} son isometrías. Dejamos al lector definir razón doble de cuaternas ordenadas de puntos en un círculo y la expresión de la distancia hiperbólica como función de esta.

En la geometría hiperbólica n -dimensional, la noción de líneas geodésicas asintóticas sigue siendo la misma. Más precisamente, dos geodésicas de D^n son positivamente asintóticas si satisfacen las mismas condiciones que en el caso bidimensional. Igualmente, se define punto al infinito como una clase de equivalencia de geodésicas positivamente asintóticas y en el modelo de Poincaré podemos identificar a los puntos al infinito como los puntos de ∂D^n . Sigue siendo válida la tricotomía para dos rectas hiperbólicas: Se cortan, son paralelas o bien son ultraparalelas.

Los elementos lineales de esta geometría son los casquetes de esferas k -dimensionales que cortan ortogonalmente a ∂D^n . Esto se sigue del hecho de que $I(D^n)$ actúa transitivamente en el conjunto de elementos lineales k -dimensionales y de que los elementos k -dimensionales que contienen al origen son de la forma $P \subseteq D^n$, donde P es un subespacio k -dimensional de \mathbb{R}^n .

Muchos de los cálculos realizados en el modelo bidimensional siguen siendo válidos, sin embargo, el cálculo de volúmenes de sólidos n -dimensionales es en general bastante difícil. J. Milnor ha encontrado una fórmula muy bonita para encontrar el volumen de tetraedros en términos de una

función, que él llama función de Lobachevsky, y de los ángulos diédricos en las aristas.

3.5. El modelo del hemisferio sur.

Este modelo se obtiene del modelo D^n proyectando estereográficamente desde n a D^n en el hemisferio sur y tomando en este último la métrica riemanniana inducida por la proyección estereográfica. Ya que la proyección estereográfica preserva ángulos, se sigue que las líneas geodésicas son arcos de circunferencias ortogonales al ecuador. En este modelo es fácil visualizar y construir elementos lineales perpendiculares a dos elementos lineales (cuando estos existan).

Sea $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria y sea S_-^n el hemisferio sur con la métrica descrita anteriormente. Los elementos lineales en este modelo son las intersecciones, con S_-^n , de los subespacios afines de \mathbb{R}^{n+1} que son paralelas al último eje coordenado. Si P_1 y P_2 son dos hiperplanos de \mathbb{R}^{n+1} que son perpendiculares al ecuador de S^n entonces cortan a S_-^n en dos hiperplanos hiperbólicos H_1 y H_2 . Estos dos hiperplanos determinan dos puntos p_1 y p_2 que son exteriores a S^n de la manera siguiente: p_i es el punto de intersección de todas las rectas tangentes a S^n , en los puntos de $P_i \subseteq S_n$, que son ortogonales a esta intersección. Tenemos que $P_i \subseteq S_n$ es una esfera de dimensión $n-1$ que corta al ecuador ortogonalmente. Si un hiperplano de tal tipo contiene al polo norte, entonces todas las rectas tangentes construidas son paralelas y decimos que se cortan en el mismo punto al infinito. Todas las rectas tangentes a S^n a lo largo de una esfera de dimensión $n-1$ y que son perpendiculares a dicha esfera son las

generatrices de un cono al que llamaremos cono osculador de dicha esfera. Al vértice del cono que corresponde a un hiperplano hiperbólico lo llamaremos el polo de dicho hiperplano. Todos los planos euclidianos que pasan por el polo de un hiperplano hiperbólico, que son paralelos al último eje coordenado, y que cortan al hemisferio sur, determinan a una recta hiperbólica ortogonal al hiperplano.

Dos hiperplanos hiperbólicos P_1 y P_2 , cuyos polos son p_1 y p_2 , se cortan, son paralelos o son ultraparalelos, según la recta euclidiana que pasa por p_1 y p_2 sea externa a S^n , tangente a S^n o corte a S^n en dos puntos distintos. Cuando P_1 y P_2 son ultraparalelos existe una única perpendicular hiperbólica común y se construye así: se toma el plano euclidiano que pasa por los polos de los hiperplanos y que es paralelo al último eje coordenado y se toma la intersección de dicho plano con el hemisferio sur.

3.6. Modelo del hemiespacio superior.

Este modelo se obtiene del modelo del hemisferio sur así: se toma un punto x en el ecuador y se proyecta estereográficamente desde x al hemisferio sur sobre el hiperplano de \mathbb{R}^n que pasa por el origen y que es ortogonal a x . La imagen del hemisferio sur es un hemiespacio en el subespacio ortogonal a x . Se puede suponer sin perder generalidad que esta imagen es el hemiespacio:

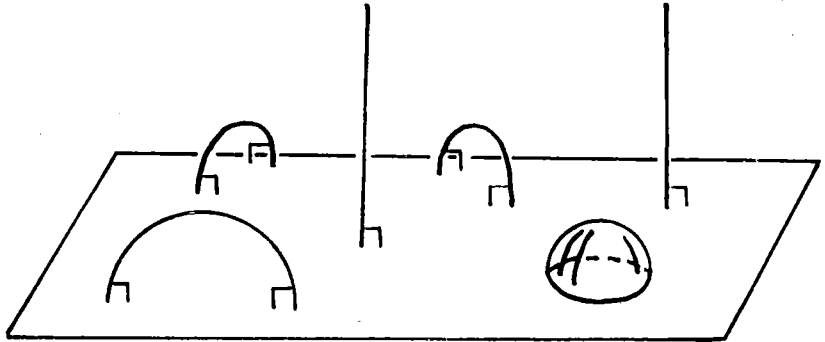
$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

La métrica inducida en H^n por la proyección estereográfica es

$$(3.7) \quad ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$$

Las geodésicas en este modelo son semicircunferencias en H^n , cuyo centro está en $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$, que son ortogonales a \mathbb{R}^{n-1} . En particular las semirectas en H , perpendiculares a \mathbb{R}^{n-1} y con vértice en \mathbb{R}^{n-1} son líneas geodésicas. Los elementos lineales de dimensión k son hemisferios de esferas k -dimensionales ortogonales a \mathbb{R}^{n-1} (y por lo tanto centradas en \mathbb{R}^{n-1}) (ver Figura 47).

Fig. 47



El grupo de isometrías de H^n es el grupo generado por las inversiones en esferas de dimensión $n-1$, centradas en \mathbb{R}^{n-1} . Si A es una transformación ortogonal de \mathbb{R}^{n-1} , si λ es un real positivo y si $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ entonces la transformación $T: H^n \rightarrow H^n$ dada por la fórmula

$$(3.8) \quad T(x, y) = (\lambda A(x) + b, \lambda y); \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad y > 0,$$

es una isometría.

3.9. El modelo proyectivo.

El espacio proyectivo \mathbb{P}^n se construye de manera análoga a la correspon-

diente a $\mathbb{P}^2 : \mathbb{P}^n$ es el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^{n+1} y se puede identificar con el cociente obtenido de S^n al identificar puntos antipodales. Todas las construcciones realizadas en el caso bidimensional se pueden generalizar a dimensiones superiores. En particular, a cada punto $x \in \mathbb{P}^n$ se le asignan sus coordenadas proyectivas $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$. La cuádrica Q:

$$Q = \{(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n ; x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0\},$$

juega el mismo papel que el que juega la cónica en el caso bidimensional. Procediendo de manera análoga al caso en dimensión dos se demuestra que Q es difeomorfa a una esfera S^{n-1} y que separa en dos componentes conexas a \mathbb{P}^n . Una de estas componentes se llama el interior de Q y la denotamos con el símbolo $i(Q)$. El interior de la cuádrica Q es difeomorfo a un disco abierto de \mathbb{R}^n . La otra componente, llamada el exterior de Q y escrita $e(Q)$ es difeomorfa al haz de Hopf de líneas sobre el proyectivo \mathbb{P}^{n-1} . Este último haz se obtiene así: Sea $J : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}$, la involución

$$J(x, t) = (-x, -t),$$

entonces el haz de Hopf citado se obtiene al tomar el cociente de $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ bajo esta involución. Para ver que en efecto $e(Q)$ es difeomorfo a dicho haz basta notar que $e(Q)$ se obtiene de la hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} , cuya ecuación es

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 1,$$

al identificar puntos simétricos con respecto al origen. Esta hipersuper-

ficie es difeomorfa a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ puesto que la proyección central, desde el origen de \mathbb{R}^{n+1} , lleva difeomorficamente al "cilindro" C :

$$C = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

sobre la hipersuperficie. Tenemos que $C = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ y la involución que intercambia puntos simétricamente situados de la hipersuperficie es equivalente a J (es interesante notar que el haz de Hopf puede ser descrito por una desigualdad polinomial en términos de coordenadas proyectivas). Existe la misma dualidad dada por polaridad como en el caso bidimensional: cada punto $p \in e(Q)$ es el polo de un hiperplano proyectivo que interseca a $i(Q)$ y por lo tanto el conjunto de tales hiperplanos está en correspondencia biyectiva con $e(Q)$.

Las transformaciones proyectivas se obtienen al proyectivizar transformaciones lineales de \mathbb{R}^{n+1} . El grupo proyectivo n -dimensional $PGL(n)$ es isomorfo al cociente del grupo $GL(n+1, \mathbb{R})$, de automorfismos lineales de \mathbb{R}^{n+1} , dividido entre su centro que consiste de los múltiplos escalares de la identidad.

El subgrupo de $PGL(n)$ de las transformaciones proyectivas que preservan a la cuádrice Q , lo designaremos con el símbolo $P^n(Q)$. Existe una única métrica riemanniana en $i(Q)$ tal que $P^n(Q)$ es el grupo de isometrías de la métrica y tal que el área de un triángulo geodésico con sus vértices en Q sea π (esto equivale a fijar la curvatura igual a -1). Usando el proceso de Gram-Schmidt, como en el caso bidimensional se puede demostrar fácilmente que $P^n(Q)$ actúa transitivamente en los subespacios proyectivos de la misma dimensión, que intersecan a $i(Q)$.

Tenemos que $i(Q)$ es difeomorfa a la hoja superior del hiperboloide n -dimensional:

$$H(-1) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}); x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1; x_{n+1} > 0\}.$$

Proyectando centralmente desde el origen de \mathbb{R}^{n+1} a $H(-1)$ sobre el disco \hat{D}^n

$$\hat{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 1); x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

contenido en el subespacio a fin de \mathbb{R}^{n+1} , cuya ecuación es $x_{n+1} = 1$. Este hiperplano y el disco \hat{D}^n los podemos identificar, de la manera obvia con \mathbb{R}^n y el disco de Poincaré D^n . Con esta identificación vemos que el modelo proyectivo puede ser representado así: el disco D^n con la métrica

$$(3.10) \quad d(p, q) = \frac{1}{2} \log \frac{|p-b|}{|q-b|} \frac{|q-a|}{|p-a|}.$$

Cuando representamos al modelo proyectivo en el disco D^n con la métrica (3.10) vemos que los elementos lineales de la geometría son de la forma $P \cap D^n$ donde P es un subespacio afín de \mathbb{R}^n . Se tiene que $S^{n-1} = \partial D^n$ corresponde a la cuádrica Q y parametriza al conjunto de puntos al infinito.

Un complejo simplicial euclidiano con sus vértices en D^n corresponde a un complejo hiperbólico cuyas caras son elementos lineales hiperbólicos. Si alguno de los vértices del complejo queda en ∂D^n , decimos que se trata de un complejo impropio. Si todos los vértices están en S^{n-1} decimos que es un complejo ideal. En particular un simplejo euclidiano con todos sus vértices en S^{n-1} se llama un simplejo ideal. La siguiente proposición es

evidente:

3.11. PROPOSICION. Todo simplejo hiperbólico (propio o impropio) no degenerado es convexo.

El modelo proyectivo representado por la métrica (3.10) no es conforme, pero cerca del origen la distorsión de los ángulos, con respecto a los ángulos euclidianos, es pequeña. Un simplejo ideal tiene ángulo diédrico entre sus caras igual a cero. Si P es un hiperplano hiperbólico en el modelo, su polo P es un punto de $e(Q)$ y por tal motivo, podemos asignar a cada colección (P_1, \dots, P_{n+1}) de puntos de $e(Q)$ el simplejo propio cuyas caras son los hiperplanos que tienen como polos a esos puntos.

3.12. El modelo del hiperboloide.

Sea H^n definido como sigue:

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

Dotemos a H^n con la métrica inducida, en su espacio tangente, por el producto interno en \mathbb{R}^{n+1} , de tipo $(n,1)$, definido así:

$$(3.13) \quad X \cdot Y = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - x_{n+1} y_{n+1},$$

donde

$$X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ y } Y = (y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Todo el razonamiento hecho para el caso bidimensional sigue siendo válido:

- 1) La métrica (3.13) induce un producto interno positivamente definido en el haz tangente de H^n y por lo tanto H^n es una variedad riemanniana.
- 2) El grupo de isometrías de H^n es el grupo de transformaciones lineales de \mathbb{R}^{n+1} que preservan al producto interno semidefinido dado por la fórmula (3.13). Es decir, de transformaciones $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ tales que

$$AJA^T = T$$

donde J es la transformación lineal que tiene como matriz diagonal $(1, 1, \dots, 1, -1)$.

Se quiere también que A preserve a H^n y por lo tanto $I(H^n)$, el grupo de isometrías de H^n es el grupo $\hat{O}(n, n-1)$ que tiene índice dos en el grupo $O(n, n-1)$ de las transformaciones lineales que preservan a (3.13).

- 3) $I(H^n)$ actúa transitivamente en H^n y en el conjunto de todas las geodésicas de H^n . Aún más, usando el proceso de Gram-Schmidt se puede ver que las diferenciales de los elementos de $I(H^n)$ actúan transitivamente en las variedades grassmannianas de $I(H^n)$: Dados dos subespacios L_1 y L_2 tangentes a H^n (posiblemente en puntos distintos) y de la misma dimensión, existe $A \in I(H^n) = \hat{O}(n, n-1)$ tal que $DA(L_1) = L_2$, donde DA es la diferencial de A .
- 4) H^n tiene curvatura seccional constante igual a -1 . Cada subespacio de \mathbb{R}^{n+1} , que corta a H^n , lo corta ortogonalmente con respecto a la

métrica indefinida (3.13), luego, interseca a H^n en una subvariedad, completa y totalmente geodésica. Si P_1^3 y P_2^3 son dos subespacios de dimensión tres, que cortan a H^n , existe una isometría A , tal que $A(P_1 \cap H^n) = P_2 \cap H^n$, luego H^n tiene curvatura constante igual a -1 en cada sección puesto que el plano

$$P = \{(x_1, 0, \dots, 0, x_n)\},$$

es isométrico a H^2 .

- 5) Las líneas geodésicas de H^n son las intersecciones de planos, que pasan por el origen, con H^n . La curva

$$\gamma(t) = (\text{sen } ht, 0, \dots, 0, \text{cos } ht)$$

tiene vector tangente de norma uno, con respecto a la métrica de H^n , luego $\gamma(t)$ es una geodésica parametrizada con su longitud de arco. De ésta manera, usando isometrías, se pueden encontrar las ecuaciones de todas las geodésicas.

- 6) Los puntos de H pueden ser considerados como los puntos en el hemiespacio superior de \mathbb{R}^{n+1} que pertenecen a la "esfera" de radio imaginario i , con respecto a la "norma" de \mathbb{R}^{n+1} :

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Los puntos de la "esfera" de radio 1 con respecto a esta norma es:

$$S(1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}.$$

Los puntos de $S(1)$ están en correspondencia biyectiva con los hiper-

planos hiperbólicos, orientados de H^n . Sea c la función de $S(1) \cup H^n$, definida como sigue:

$$C(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$$

donde $\|X\|$ y $\|Y\|$ son reales positivos o imaginarios puros positivos.

Se tiene:

6a) Si $X, Y \in H^n$ entonces

$$C(X, Y) = \cosh[d(X, Y)],$$

donde $d(X, Y)$ es la distancia hiperbólica entre X y Y .

6b) Si $X, Y \in S(1)$ y $X \neq Y$ entonces los hiperplanos hiperbólicos X^\perp , Y^\perp que corresponden a X y Y se intersecan en H^n si y solo si

$$[C(X, Y)]^2 < 1.$$

Además, $[C(X, Y)]^2 < 1$ si y solo si el subespacio de \mathbb{R}^{n+1} generado por X y Y es un subespacio donde el producto interno es positivamente definido. Ya que el plano euclidiano que generan X y Y puede ser llevado a el subespacio de \mathbb{R}^{n+1} cuya ecuación es $x_{n+1} = 0$, por un elemento $A \in O(n, n-1)$ tenemos que $C(X, Y) = \cos \kappa(X, Y)$ cuando $[C(X, Y)]^2 < 1$ (la métrica en el hiperplano $x_{n+1} = 0$ coincide con la métrica euclidiana). Por el otro lado el mismo argumento usado en el caso bidimensional implica que si $[C(X, Y)]^2 < 1$ entonces

$$C(X, Y) = \cos \kappa(X, Y) = \pm \cos \kappa(X^\perp, Y^\perp),$$

donde el último signo depende de la orientación de X^\perp y de Y^\perp y el

ángulo en consideración es el ángulo diédrico que forman X^\perp y Y^\perp .

- 6c) Sean X y Y como en 6b). Entonces los hiperplanos correspondientes X^\perp , Y^\perp tienen una perpendicular común $\leftrightarrow [C(X,Y)]^2 > 1 \leftrightarrow$ el subespacio generado por X y Y corta a $H^n \leftrightarrow$ el producto interno es de tipo (+,-) en el subespacio generado por X y Y . Si alguna de estas cosas ocurre, entonces:

$$C(X,Y) = \pm \cos h(d(X^\perp, Y^\perp))$$

donde el signo se escoge según C sea positivo o negativo.

- 6d) Con la misma notación se tiene: X^\perp y Y^\perp son paralelos $\leftrightarrow [C(X,Y)]^2 = 1 \leftrightarrow$ el subespacio generado por X y Y es asintótico a $H^n \leftrightarrow$ el subespacio generado por X y Y contiene a una generatriz del cono $x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_n^2 = 0 \leftrightarrow$ el producto interno restringido al subespacio generado por X y Y es degenerado.

- 6e) Si $X \in H^n$ y $Y \in S(1)$ entonces

$$C(X,Y) = -i \sinh d(X, Y^\perp).$$

3.14. Oriesferas y Oríobolas.

Las oriesferas son los objetos análogos a los oricícllos y son hipersuperficies de H^n , el espacio hiperbólico n -dimensional, que cortan ortogonalmente a una familia completa de líneas geodésicas paralelas:

3.15. DEFINICION. Una oriesfera de H^n es una hipersuperficie de H^n que corta ortogonalmente a todas las geodésicas que pertenecen a una misma

clase de equivalencia de geodésicas positivamente asintóticas.

Se tiene de la definición que una oriesfera determina a un punto al infinito (se puede decir, vagamente, que una oriesfera es "tangente" a un punto al infinito). El grupo de isometrías de \mathbb{H}^n actúa transitivamente en el conjunto de oriesferas y en los diferentes modelos (salvo en el modelo del hiperboloide en donde no es tan fácil visualizar a las oriesferas) son objetos sencillos:

3.16. En el modelo del disco de Poincaré D^n las oriesferas son esferas de dimensión $n-1$, interiores a D^n y tangentes a ∂D^n (se suprime el punto de tangencia, que es el punto al infinito que determina el oriciclo) (ver Figura 48).

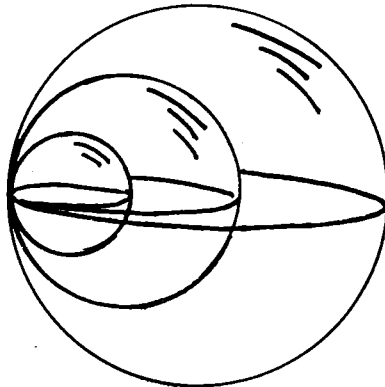
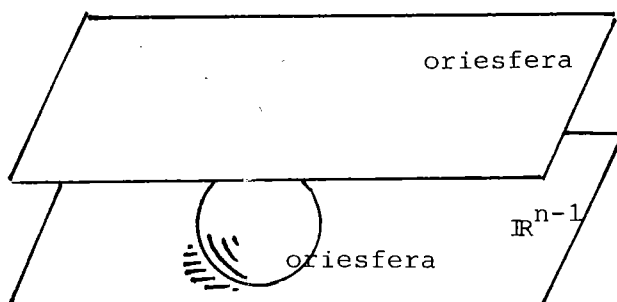


Fig. 48

3.17. En el modelo del hemiespacio superior las oriesferas son las esferas contenidas en el hemiespacio superior cerrado y tangentes a $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. En particular los hiperplanos $x_n = c$, donde c es una constante positiva, son oriesferas que corresponden a las semirectas perpendiculares a \mathbb{R}^{n-1} (ver

Figura 49).

Fig. 49



3.18. En el modelo del hemisferio sur las oriesferas son esferas en dicho hemisferio tangentes al ecuador.

3.19. En el modelo proyectivo representado como D^n con la métrica (3.10) son elipsoides de revolución tangentes a ∂D^n .

3.20. PROPOSICION. Todas las oriesferas son isométricas a \mathbb{R}^n , es decir, son variedades riemannianas completas con curvatura seccional cero con respecto a la métrica inducida por la métrica hiperbólica.

DEMOSTRACION. Una oriesfera queda completamente determinada por un punto y un vector tangente a \mathbb{H}^n en el punto y ortogonal a la oriesfera (puesto que esto determina el punto al infinito al que pertenece la oriesfera). Luego, el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n actúa transitivamente en el conjunto de oriesferas. Por lo tanto, todas las oriesferas son isométricas. La demostración no depende del modelo así es que vamos a utilizar el modelo del hemiespacio superior y una oriesfera específica: la oriesfera $x_n = 1$.

La métrica en esta oriesfera obviamente coincide con la métrica euclidiana del hiperplano $x_n = 1$, luego, toda oriesfera es isométrica con el espacio euclidiano. (Q.E.D.)

De una manera análoga al caso bidimensional se demuestra que las oriesferas $x_n = c_1$, $x_n = c_2$ ($c_1, c_2 > 0$), en el modelo H^n son hipersuperficies equidistantes que están a distancia $|\log c_1 - \log c_2|$.

En el modelo D^n , de Poincaré, consideremos a todas las esferas de dimensión $n-1$, de \mathbb{R}^n , que cortan a ∂D^n con un ángulo constante $\alpha \neq 0$. Sea F_α tal familia. Ya que inversiones en esferas preservan ángulos vemos que $I(D^n)$ actúa transitivamente en F_α y el subgrupo de $I(D^n)$ que fija a una esfera S de F_α actúa transitivamente en el haz tangente unitario de $S \cap D^n$. Luego, cada $S \in F_\alpha$ es una hipersuperficie completa de D^n con curvatura seccional constante y no es muy difícil ver que la curvatura es negativa (dejo al lector expresar la curvatura como función de α). Los elementos de F_α son los equivalentes, en dimensión superior a los hiperciclos y por eso los llamaremos hiperesferas. Las oriesferas corresponden al caso $\alpha = 0$. Es interesante notar que H^n posee subvariedades completas con curvatura constante negativa arbitraria. La oriesfera $x_n = c > 0$, en el modelo H^n es fijada solamente por isometrías de H^n de la forma

$$T(x_1, \dots, x_n) = T(x, x_n) = (Ax + b, x_n); A \in O(n-1, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

3.21. DEFINICION. Una oribola abierta es la región de H^n que es "interior" a una oriesfera. Más precisamente: toda oriesfera tiene una orientación natural dada por el campo vectorial ortogonal a la oriesfera que

corresponde a los vectores tangentes a las geodésicas positivamente asintóticas que determinan a la oriesfera. La oribola es la región en la que "entran" dichas geodésicas. La otra componente, el "exterior" de la oriesfera nunca puede ser una oribola. Una oribola cerrada es la adherencia de una oribola abierta.

Todas las oribolas son isométricas y el grupo de isometrías de \mathbf{H}^n actúa transitivamente en el conjunto de las oribolas (aunque no actúa transitivamente en una oribola). En el modelo D^n de Poincaré las oribolas son discos n -dimensionales euclidianos de D^n , tangentes a ∂D^n y en el modelo \mathbf{H}^n las oribolas son discos euclidianos tangentes a \mathbb{R}^{n-1} o bien hemiespacios $x_n > c > 0$, $x_n \geq c > 0$, según la oribola sea abierta o cerrada. Todas las oribolas son hiperbólicamente convexas y de hecho una oribola abierta es la región convexa en el complemento de una oriesfera en \mathbf{H}^n .

3.22. Discos y esferas hiperbólicas.

Se define la esfera de radio $r \geq 0$, centrada en el punto $p \in \mathbf{H}^n$ como el lugar geométrico de los puntos de \mathbf{H}^n que equidistan una distancia r del punto p . Denotemos $S_r^n(p)$ a dicha esfera. El disco abierto de radio $r > 0$, a quien denotaremos $D_r(p)$, (centrado en p) es definido así:

$$D_r^n(p) = \{x \in \mathbf{H}^n; d(x,p) < r\},$$

donde d designa a la distancia hiperbólica.

En el modelo D^n , $S_r^n(0)$ es la esfera euclidiana de radio euclidiano R ,

$$R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1},$$

luego, por transitividad, las esferas y discos hiperbólicos en el modelo D^n son, respectivamente esferas y discos (aunque sus centros y radios hiperbólicos no necesariamente coinciden con los euclidianos).

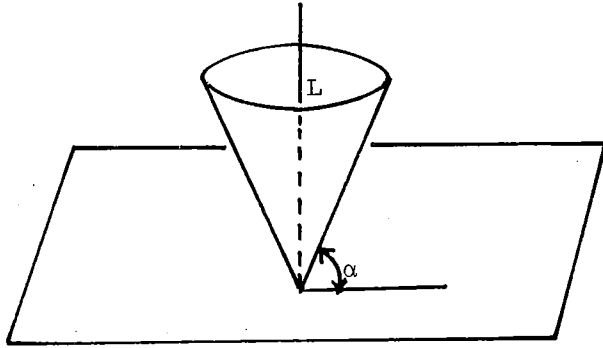
El grupo ortogonal actúa isométricamente en \mathbb{H}^n y deja fijo a $S_r^n(0)$ y actúa transitivamente en $S_r^n(0)$, luego, $S_r^n(0)$ tiene curvatura seccional constante positiva (dejo al lector expresar esta curvatura como función de r). Luego, las esferas hiperbólicas, las hiperesferas hiperbólicas y las oriesferas son hipersuperficies de \mathbb{H}^n con curvatura seccional constante positiva negativa y cero, respectivamente. Se tiene que para todo $K \in \mathbb{R}$ existe una hipersuperficie de \mathbb{H}^n , completa, simplemente conexa y con curvatura constante K . Este hecho da otra diferencia entre la geometría euclidiana y la no euclidiana. Un teorema célebre de Hilbert dice que \mathbb{R}^3 no contiene una superficie completa (o lo que es lo mismo, cerrada como subconjunto de \mathbb{R}^3) con curvatura constante negativa (no hay un modelo de la geometría hiperbólica encajado isométricamente en \mathbb{R}^3). Este resultado de Hilbert fue generalizado por Efimov para superficies con curvatura negativa (no necesariamente constante), completas, donde la curvatura está separada de cero.

3.23. Vecindades tubulares de geodésicas.

Si consideramos la línea geodésica $L = \{(0, \dots, 0, x_n); x_n > 0\}$ en el modelo H^n , entonces procediendo exactamente como en el caso bidimensional, vemos que la δ -vecindad tubular (abierta) de L es un cono n -dimensional. Este cono es la unión de todos los rayos euclidianos de H^n , con vértice en el origen, que forman un ángulo inferior a α , donde

$$\alpha = 2 \tan^{-1}(e^{\delta}) - \frac{\pi}{2}$$

Fig. 50



3.24. Isometrías.

Obviamente los grupos de isometrías caracterizados en los diferentes modelos de la misma dimensión son isomorfos, puesto que los modelos son isométricos. Sea $I(\mathbb{H}^n)$ el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n . En los modelos del disco de Poincaré, del hemiespacio de Poincaré y en el del hemisferio sur, las isometrías fueron caracterizadas como productos de inversiones en ciertas esferas. Las inversiones en esferas son involuciones y corresponden a reflexiones en hiperplanos hiperbólicos. En esto hay semejanza con la geometría euclidiana, puesto que cualquier isometría de \mathbb{R}^n es una composición de reflexiones euclidianas con respecto a hiperplanos. Por ejemplo: una translación de \mathbb{R}^n es la composición de dos reflexiones con respecto a hiperplanos distintos y paralelos. Para las rotaciones, el hecho de ser toda rotación un producto de reflexiones es un ejercicio de álgebra lineal.

Si $P \subseteq \mathbb{H}^n$ es un hiperplano, entonces la reflexión hiperbólica con

respecto a P es la isometría R evidente: es la transformación que fija a cada punto de P y que manda a cada línea geodésica, ortogonal a P isométricamente sobre ella misma así: si $\gamma(t)$ es una geodésica perpendicular a P , tal que $\gamma(0) \in P$, entonces $R(\gamma(s)) = \gamma(-s)$. Se verifica fácilmente que R es de hecho una isometría.

Las reflexiones en hiperplanos no preservan la orientación de \mathbb{H}^n y el subgrupo, $I_+(\mathbb{H}^n)$, de las isometrías de \mathbb{H}^n que preservan la orientación, consiste de los elementos de $I(\mathbb{H}^n)$ que son una composición de un número par de reflexiones en hiperplanos hiperbólicos.

La geometría hiperbólica nos sugiere la manera de construir varios tipos de isometrías, por ejemplo: Si P_1 y P_2 son dos hiperplanos hiperbólicos ultraparalelos distintos y si R_1 y R_2 son las reflexiones con respecto a estos hiperplanos, entonces R_1 y R_2 dejan fija, como subconjunto, a la línea hiperbólica L que es la perpendicular común a P_1 y P_2 , luego, $R_1 \circ R_2$ deja fija a L y actúa en ella como una translación. Todos los hiperplanos perpendiculares a L son permutados entre ellos por $R_1 \circ R_2$ y ninguno es dejado fijo por esta transformación. Podemos decir que $T = R_1 \circ R_2$ es una translación pura a lo largo de L . Por el otro lado si P es un hiperplano y h es una isometría de P , entonces, usando las geodésicas ortogonales a P es claro como extender h a una isometría de todo \mathbb{H}^n . Todas las isometrías que dejan fijo a P son de este tipo.

Las isometrías mandan a una clase de equivalencia de geodésicas positivamente asintóticas en otra tal clase de equivalencia, luego $I(\mathbb{H}^n)$ actúa en los puntos al infinito (actúa en el horizonte visual). El "horizonte" se puede topologizar de la misma manera que en el caso bidimensional: cada

vector tangente y unitario en un punto fijo $p \in \mathbb{H}^n$ determina a un y solo un punto al infinito y todo punto al infinito corresponde a un tal vector. Por lo tanto, los puntos del infinito se pueden identificar con la esfera S^{n-1} y, en consecuencia, el conjunto de puntos al infinito se puede topologizar como la esfera estandar S^{n-1} . Si se cambia al punto p , entonces se cambia la parametrización con una transformación de Moebius n -dimensional. ¿Cómo son los grupos de isotropía, bajo isometrías de los elementos lineales de \mathbb{H}^n ? La siguiente proposición es una respuesta parcial:

3.25. PROPOSICION. Si $p \in \mathbb{H}^n$, entonces el subgrupo $E(p) \subseteq I(\mathbb{H}^n)$ de elementos que estabilizan a p :

$$E(p) = \{A \in I(\mathbb{H}^n); A(p) = p\},$$

es isomorfo al grupo $O(n, \mathbb{R})$ de transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^n . Luego $E(p)$ es un grupo de Lie compacto. Si $L \subseteq \mathbb{H}^n$ es una línea geodésica, entonces su estabilizador: $E(L) = \{A \in I(\mathbb{H}^n); A(L) = L\}$ es isomorfo al grupo de similitudes puras de \mathbb{R}^{n-1} , es decir, transformaciones $A: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ del tipo

$$A(x) = \lambda O(x),$$

donde $\lambda > 0$ y O es una transformación ortogonal (por tanto $E(L)$ no es compacto). El subgrupo de $E(L)$ de las isometrías que fijan a cada punto de L es isomorfo a $O(n-1, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACION. La afirmación es independiente del modelo, luego, se puede

tomar el modelo D^n . Como $I(D^n)$ actúa transitivamente, se puede suponer que p es el origen. El subgrupo de $I(D^n)$ que fija al origen fija también a la esfera hiperbólica $S_1(0)$ y actúa isométricamente en ella; además, la acción restringida a $S_1(0)$ debe ser efectiva, puesto que una isometría que fije a cada punto de $S_1(0)$ necesariamente fija a todo H^n . Este grupo $E(0)$ contiene al grupo de rotaciones euclidianas $O(n, \mathbb{R})$, luego $E(0) = O(n, \mathbb{R})$. Para encontrar el estabilizador de una línea geodésica basta encontrar al estabilizador en $I(H^n)$ de la línea geodésica $L = \{(0, \dots, 0, x_n) : x_n > 0\}$. Un elemento de $E(L)$ fija a los puntos al infinito determinado por L . Si $A \in E(L)$ entonces A manda a cada recta hiperbólica que corresponde a una recta euclidiana perpendicular al hiperplano $x_1 = 0$ en otra recta. Por la observación anterior se sigue que $E(L)$ actúa en la orisfera $x_n = 1$, de la manera siguiente: si $A \in E(L)$, sea $\hat{A}: O \rightarrow O$, $\hat{A}(x) = \pi(A(x))$, donde O denota a la orisfera $x_n = 1$ y donde π es la proyección ortogonal euclidiana de \mathbb{R}^n en el hiperplano $x_n = 1$. Se tiene $\widehat{A \cdot B} = \hat{A} \cdot \hat{B}$, luego en efecto se tiene una acción. $A(0)$ es un hiperplano $x_n = c > 0$, y por lo tanto, $d(\hat{A}(x), \hat{A}(y)) = \frac{1}{c} d(x, y)$ para todo par de puntos $x, y \in O$. Como cada $A \in E(L)$ fija a L , se tiene que $\hat{A}(0, \dots, 1) = (0, \dots, 1)$ se sigue inmediatamente que \hat{A} debe ser una similitud pura de O que es isométrico a \mathbb{R}^{n-1} . Si A fija a todos los puntos de L , entonces A fija a O y \hat{A} es ortogonal. (Q.E.D.)

La dimensión de $I(H^n)$ se puede calcular así:

En el modelo del hiperboloide H^n , el grupo de isometrías de H^n fue caracterizado como el grupo $\hat{O}(n, n-1)$ de transformaciones de \mathbb{R}^{n+1} que preservan la forma cuadrática $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$, y que también pre-

servan a H . Luego, la álgebra de Lie de $\hat{O}(n,n-1)$ es igual al álgebra de Lie de $O(n,n-1)$. Cerca de la identidad, toda matriz $A \in O(n,n-1)$ es la exponencial de una matriz de la forma:

$$B = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & & & & \\ a_2 & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_n & & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathbf{A} \\ \\ \\ \end{array} ,$$

donde la matriz $(n \times n)$ A es una matriz antisimétrica: $A + A^T = 0$. Luego $\dim(I(\mathbb{H}^n)) = \frac{n(n+1)}{2}$. La matriz B la podemos describir en términos de $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $A = ((a_{ij}))$ con la notación $B = B(a; A)$. Se puede proceder a hacer una clasificación de isometrías usando la estructura del álgebra de Lie que se escribe como suma directa de matrices de la forma $B(0; A)$ y matrices de la forma $B(A; 0)$. Otra manera de tratar de clasificar a las isometrías de \mathbb{H}^n (es decir, describir la dinámica y la geometría de las clases conjugadas del grupo \mathbb{H}^n) es la siguiente: En el modelo H^n se toma una matriz que represente a un elemento de $\hat{O}(n,n-1)$ y se analizan las posiciones de los subespacios invariantes de la matriz (usando álgebra lineal) con respecto al hiperboloide H^n . Estos subespacios pueden ser tangentes a H^n , ajenos a H^n o cortar a H^n en un elemento lineal invariante bajo la isometría que induce la matriz. Veamos el argumento geométrico que utiliza Thurston para clasificar isometrías de \mathbb{H}^2 :

3.26. PROPOSICION (Proposition 4.9.3 en [Th]). Si $g: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una isometría distinta de la identidad, que preserva la orientación de \mathbb{H}^2 , entonces existen las tres distintas posibilidades siguientes:

- 1) g tiene un único punto fijo $z \in \mathbb{H}^2$;
- 2) g deja invariante a una única línea geodésica L ;
- 3) g no satisface ni 1) ni 2) en cuyo caso g tiene un único punto fijo al infinito.

3.27. DEFINICION. g se llama elíptica, hiperbólica o parabólica si satisface, respectivamente 1), 2) ó 3).

DEMOSTRACION. Por hipótesis se puede tomar $x \in \mathbb{H}^2$ tal que $x \neq g(x)$, luego existe una única línea geodésica L que pasa por x y $g(x)$. Considérese las rectas L y $g(L)$. Si $L = g(L)$ entonces g satisface 2) (es muy fácil ver que L es la única geodésica invariante por g). Si $L \neq g(L)$ tómense las rectas L_1 y L_2 que son las bisectrices de las rectas L y $g(L)$ en el punto $g(x)$ y las rectas $g(L)$ y $g^2(L)$ en el punto $g^2(x)$. Hay tres posibilidades:

- i) L_1 y L_2 se intersecan en el punto $z \in \mathbb{H}^2$. El punto z debe ser punto fijo de g puesto que el triángulo cuyos vértices son z , $g(x)$ y $g^2(x)$ es isósceles, luego $d(z, g(x)) = d(z, g^2(x))$ y puesto que g preserva orientación z debe ser punto fijo.
- ii) L_1 y L_2 son ultraparalelas y por lo tanto tienen una recta perpendicular común M . Esta recta tiene que ser invariante por g , puesto que el cuadrilátero formado por $g(x)$, $g^2(x)$ y los pies de las perpendiculares de L_1 con M y L_2 con M , es de Saccheri y por

Lo tanto $d(g(x), M) = d(g^2(x), M)$.

- iii) L_1 y L_2 corresponden a geodésicas positivamente asintóticas que determinan el punto al infinito w , que tiene que ser necesariamente invariante bajo g puesto que $g(L_1) = L_2$. El lector puede verificar fácilmente que w es el único punto fijo de g .

Veamos ahora la clasificación de isometrías cuando la dimensión es superior a dos:

3.28. PROPOSICION. Sea $g: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una isometría que preserva la orientación de \mathbb{H}^n , entonces hay tres posibilidades:

- i) g deja fijo a un punto $z \in \mathbb{H}^n$ y es, por lo tanto conjugada a una rotación en el origen en el modelo D^n .
- ii) g no deja ningún punto fijo en \mathbb{H}^n , pero fija a una única geodésica, como subconjunto, de \mathbb{H}^n . En este caso g es conjugada a una transformación, en el modelo H^n , del tipo: $T(x, y) = (\lambda A(x), \lambda y)$ donde, $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$; $y > 0$, $\lambda > 0$, $A \in O(n-1, \mathbb{R})$;
- iii) g no tiene punto fijo en \mathbb{H}^n , ni tampoco deja fija, como subconjunto, a alguna geodésica de \mathbb{H}^n . Entonces g es conjugada, en el modelo H^n a una translación: $T(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1 + a_1, \dots, x_{n-1} + a_{n-1}, x_n)$.

DEMOSTRACION. Las posibilidades son exhaustivas y mutuamente excluyentes, puesto que una isometría g que fija, como subconjuntos, a dos geodésicas distintas tiene necesariamente un punto fijo. De hecho, se puede suponer que g es conjugada a la isometría $T(x, y) = (\lambda A(x), \lambda y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y > 0$, $A \in O(n-1, \mathbb{R})$, luego si g fija a otra geodésica distinta de $L = \{(0, \dots, y)\}$

necesariamente $\lambda = 1$ y g fija puntualmente a las dos geodésicas. Si g es del tipo i) o ii) entonces del análisis de subgrupos estabilizadores de puntos y líneas geodésicas se sigue que g es conjugada a los prototipos indicados. Si g no tiene puntos fijos ni líneas geodésicas fijas entonces g debe tener exactamente un punto fijo en el horizonte. Para ver la afirmación anterior notamos que en el modelo proyectivo g es una transformación proyectiva que fija a la adherencia de $i(Q)$, luego, siendo esta adherencia homeomorfa a un disco cerrado n -dimensional, se sigue en virtud de las hipótesis y el teorema de Brouwer que g debe tener exactamente un punto fijo en este disco y este punto fijo debe de pertenecer a Q . Si ahora pasamos del modelo proyectivo al hemisferio sur y después a H^n vía proyección estereográfica, desde el punto fijo de g , vemos que g permuta a los rayos euclidianos perpendiculares a \mathbb{R}^{n-1} . Ahora bien, g debe dejar fija a la oriesfera O que corresponde al hiperplano $x_n = 1$ puesto que en caso contrario g transformaría al hiperplano $x_n = 1$ en el hiperplano $x_n = c > 0$, donde $c \neq 1$, y la función $f: O \rightarrow O$ definida así: $f = \pi \circ g$, donde π es la proyección ortogonal euclidiana en el hiperplano $x_n = 1$, sería una contracción si $c > 1$ y f^{-1} sería una contracción si $c < 1$. Esto implica que f tiene un punto fijo lo cual contradiría a las hipótesis puesto que g fijaría al rayo vertical que pasa por el punto fijo de f . Del hecho de que g fija a la oriesfera $x_n = 1$ y actúa sin puntos fijos e isométricamente en dicho hiperplano, se sigue que g es una translación. (Q.E.D.)

3.29. DEFINICION. Decimos que $g \in I(H^n)$, g distinto de la identidad es elíptico, hiperbólico, o parabólico según g satisfaga i), ii) ó iii), res-

pectivamente.

Si g es elíptico con punto fijo z , decimos que g es una rotación alrededor de z . Si g es hiperbólico con línea geogésica invariante L , entonces g se llama una translación-rotación a lo largo del eje L . Si g es conjugada a la isometría

$$T(x,y) = (\lambda x, \lambda y); \lambda > 0, x = (x_1, \dots, x_{n-1}), y > 0,$$

en el modelo H , decimos que g es una translación pura a lo largo de L .

Finalmente, si g es parabólica con punto fijo al infinito p , decimos que g es una p -translación.

Con lo que se ha visto hasta el momento ya se puede visualizar la dinámica de una isometría hiperbólica, sin embargo, haré una construcción geométrica que pensé, inspirándome en la Proposición 4.9.3 de Thurston: la construcción de haces de Steiner n -dimensionales asociados a isometrías hiperbólicas.

Considérese \mathbb{H}^n como el interior de la cuádrlica Q en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n y al grupo de isometrías de \mathbb{H}^n como $P_+(Q)$: transformaciones proyectivas que preservan a $i(Q)$, junto con su orientación. Es fácil ver (contando parámetros) que dada una isometría, $g \in P_+(Q)$, existe un punto $x \in i(Q) = \mathbb{H}^n$ y un hiperplano P tal que $x, g(x)$ pertenecen a P y P no es dejado fijo por g . Se tiene que P y $g(P)$ corresponden a dos hiperplanos proyectivos que se intersecan a lo largo de un subespacio proyectivo de dimensión $n-2$ que contiene a $g(x)$. Sea P_1 el hiperplano hiperbólico que contiene a M y que bisecta a P y $g(P)$. Sea P_2 el hiperplano hiperbólico

que contiene a $g(M)$ y que bisecta a $g(P)$ y $g^2(P)$. Entonces P_1 y P_2 corresponden a los hiperplanos proyectivos A y B . Sea $N = A \cap B$, que es un subespacio proyectivo de dimensión $n-2$, entonces hay tres posibilidades:

- i) $N \cap i(Q) \neq \emptyset$
- ii) $N \subset e(Q)$
- iii) N es tangente a Q .

Se puede demostrar que N es invariante bajo la transformación proyectiva G , que induce a g (se utiliza el mismo tipo de argumentos que Thurston). Luego, el haz de todos los hiperplanos proyectivos que contienen a N es invariante bajo G . Si ocurre ii) la transformación g es hiperbólica puesto que el haz en cuestión contiene exactamente a dos hiperplanos tangentes a Q en los puntos p y q . G actúa no trivialmente en los elementos del haz (los permuta). Los puntos p y q determinan a la única línea geodésica invariante por g : esta línea es el eje de g . Si ocurre iii) g tiene que ser parabólica: g es una m -translación, donde m es el punto de tangencia de N y Q . Si ocurre i) entonces g debe ser elíptica: un punto fijo es la intersección de un plano hiperbólico bidimensional que es perpendicular, simultáneamente a $P \cap g(P)$, $g(P) \cap g^2(P)$ y M . Dejamos al lector verificar que tal elemento lineal bidimensional, perpendicular a los tres elementos lineales de dimensión $n-2$, existe.

Los elementos del haz discutido en el párrafo anterior cortan a Q en una foliación singular cuyas hojas no singulares son esferas de dimensión $n-2$ o discos de dimensión $n-2$. Si g es elíptica entonces hay una sola hoja singular difeomorfa a una esfera S^{n-3} y todas las hojas no singulares son componentes de esferas de dimensión $n-2$, que contienen a la hoja singular,

cuando se suprime a la hoja singular: son discos que tienen como frontera a la hoja singular. Si g es parabólica entonces la foliación está formada por todas las esferas de dimensión $n-2$ de Q que son tangentes en el punto m de Q . Si g es hiperbólica entonces la foliación singular se ve como la foliación por esferas paralelas: hay dos puntos singulares. Las foliaciones descritas, junto con la familia de círculos ortogonales, son foliaciones g -invariantes de tipo elíptico, parabólico e hiperbólico, respectivamente. A tal pareja de foliaciones la llamaremos red de Steiner.

3.30. Isometrías del espacio hiperbólico H^3 .

Vimos ya que en el disco de Poincaré $D^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$, las isometrías son composición de inversiones en esferas bidimensionales ortogonales a $S^2 = \partial D^3$. Si consideramos a S^2 como la esfera de Riemann se tiene que cada isometría de D^3 , con la métrica hiperbólica, induce una transformación que preserva círculos y ángulos. Sabemos que toda tal transformación $F: S^2 \rightarrow S^2$; $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ debe ser de los tipos

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

o bien

$$F(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}.$$

Luego, $I(H^3)$ es isomorfo al grupo de transformaciones de Moebius generales. El grupo $I_+(H^3)$ de las isometrías que preservan la orientación de H^3 es por lo tanto el grupo M de las transformaciones de Moebius especia-

les (que no involucran conjugación compleja):

$$M = \left\{ T: \hat{C} \rightarrow \hat{C}; T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \right\},$$

donde $S^2 = \hat{C} = C \cup \{\infty\}$ es el plano extendido, o esfera de Riemann. Dada una matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in C,$$

se tiene la transformación de Moebius

$$\hat{A}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

y dos matrices A y B representan a la misma transformación de Moebius si y solo si existe $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda A = B$. Luego:

3.31. PROPOSICION. Sea $\psi: GL(2, C) \rightarrow M$ el epimorfismo que asocia a cada matriz no singular compleja $A \in GL(2, C)$ la transformación de Moebius \hat{A} . Entonces el núcleo de ψ son todas las matrices escalares

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 0.$$

3.32. COROLARIO. Sea $SL(2, C) \subseteq GL(2, C)$ el grupo de matrices, no singulares, complejas, de orden dos y de determinante uno. Entonces $SL(2, C)/\{I, -I\}$ es isomorfo a M , donde I es la matriz identidad.

3.33. COROLARIO. El grupo $I_+(\mathbb{H}^3)$ es isomorfo al grupo $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$. Este grupo cociente se llama el grupo proyectivo especial complejo de dimensión dos.

Una manera natural de representar a \mathbb{H}^3 y a la acción de \mathbb{H}^3 como grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 es usando los cuaternios en la forma siguiente:

Consideremos al hemiespacio H^3 contenido en el espacio cuaternionico K

$$K = \{x+iy+jz+kw; i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1\}$$

mediante la identificación

$$f(x, y, t) = x+iy+jt; (x, y, t) \in H^3, (t > 0).$$

Podemos identificar a $x+iy$, con el complejo $x+iy$, para escribir $f(x, y, t) = z+jt$.

Las transformaciones de Moebius cuaternónicas derechas son las transformaciones

$$T: K \rightarrow K,$$

definidas así:

$$T(q) = (\alpha q + \beta)(\gamma q + \delta)^{-1}; q \in K, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Si α, β, γ y δ son números complejos, es decir, si $\alpha = x_1+iy_1$, $\beta = x_2+iy_2$, $\delta = x_3+iy_3$, $\gamma = x_4+iy_4$, entonces vemos que T preserva a H^3 (o más precisamente a $f(H^3)$). Luego, cada matriz $A \in GL(2, \mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

induce a una transformación de H^3

$$(3.34) \quad T(z+tj) = \frac{[(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})+t^2ac]+tj}{|cz+d|^2+t^2|c|^2}$$

Dejamos al lector verificar que cada transformación del tipo (3.34) es una isometría de H^3 . La métrica en H^3 en notación cuaterniónica es:

$$(3.35) \quad ds^2 = \frac{|dz|^2+dt^2}{t^2},$$

(la transformación $q \mapsto q^{-1}$, así como las transformaciones $q \mapsto aq+b$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, preservan la métrica (3.35), puesto que la primera es una inversión en el origen seguida de una reflexión en un hiperplano perpendicular al subespacio de dimensión tres que contiene a H^3 y las segundas son del tipo:

$$T(x, y, t) = (\lambda A(x, y) + b, \lambda t).$$

En esta representación se toma clara la interrelación que existe entre la variable compleja y las variedades hiperbólicas: los grupos discretos de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ actúan discontinuamente en H^3 , es decir, cada compacto de H^3 corta solamente a un número finito de sus imágenes bajo la acción del grupo discreto. Esta observación es debida a H. Poincaré y el estudio de esta relación es actualmente un campo fértil y activo. Si un subgrupo discreto $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ actúa sin puntos fijos en H^3 , lo que es equivalente

a que Γ no tenga elementos elípticos, entonces Γ determina a la variedad hiperbólica completa H^3/Γ .

4.1. ESTRUCTURAS GEOMETRICAS EN VARIEDADES

Una variedad topológica M , de dimensión n , es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , es decir, su topología está definida por una colección de cartas locales: $\{(U_\alpha, \phi_\alpha); \alpha \in I\}$, donde U_α es abierto de M ; $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{R}^n e I es un conjunto de índices. Vagamente hablando, una estructura geométrica en M se obtiene al suponer que los cambios de coordenadas $\phi_{ij}: \phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j); i, j \in I$, satisfacen ciertas hipótesis. Por ejemplo: la orientabilidad de M (que es un concepto que se puede definir en términos puramente homológicos) se puede garantizar cuando la familia $\{\phi_{ij}; i, j \in I\}$ preserva a la orientación inducida, en cada abierto de sus dominios, por una orientación de \mathbb{R}^n . Resulta natural pedirle a la familia $\{\phi_{ij}\}$ condiciones generales con respecto a la propiedad común que deben de satisfacer. Por ejemplo si se restringe ϕ_{ij} a un abierto de su dominio entonces la restricción debiera satisfacer la misma propiedad que posee ϕ_{ij} . Asimismo, es natural pedir que composiciones (cuando estén definidas) e inversos de la familia $\{\phi_{ij}\}$ deben también poseer la propiedad común. Así, llegamos a que una manera conveniente de dar una estructura geométrica en M (es decir, una manera específica de modelar localmente a M en \mathbb{R}^n) es pedir que la familia $\{\phi_{ij}\}$ pertenezca a un pseudogrupo:

4.2. DEFINICION. Un pseudogrupo de homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n es un conjunto $G = \{\phi_i; i \in I; \phi_i: U_i \rightarrow V_i\}$ de homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n , es decir, para cada $i \in I$, $\phi_i: U_i \rightarrow V_i$ es un homeomorfismo del abierto U_i de \mathbb{R}^n sobre el abierto V_i de \mathbb{R}^n ; tal que:

- 1) Si $\phi \in G$ y U es un abierto contenido en el dominio de ϕ , entonces la restricción de ϕ a U , $\phi|_U$, pertenece a G .
- 2) Si ϕ y ψ pertenecen a G y existe la composición $\psi \circ \phi$, entonces $\psi \circ \phi \in G$ (es decir, si $\text{Dom } \psi \supset \text{Im } \phi$; $\phi, \psi \in G$ entonces $\psi \circ \phi \in G$).
- 3) Si $\phi \in G$ entonces $\phi^{-1} \in G$.
- 4) Si $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ es un abierto de \mathbb{R}^n y si $\phi: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo del abierto U sobre el abierto V y si además la restricción de ϕ a U_{α} pertenece a G para cada α , entonces $\phi \in G$ (en particular, U_{α} es abierto).

4.3. DEFINICION. Si G es un pseudogrupo, entonces una G -variedad es una variedad topológica M con un atlas $\{\phi_i; \phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in I\}$ tal que el conjunto $\{\phi_{ij}; i, j \in I\}$ de los cambios de coordenadas está contenido en G . Un tal atlas se llama una G -estructura.

4.4. Ejemplos de pseudogrupos y G -variedades.

He aquí una serie de ejemplos de pseudogrupos:

- 1) $G_1 = \text{Loc}(\mathbb{R}^n)$: este es el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n . Obviamente este pseudogrupo contiene como subconjunto a cualquier pseudogrupo de homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n .
- 2) $G_2 = \text{Loc}_+(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n que preservan la orientación inducida en cada abierto por una orientación fija de \mathbb{R}^n .
- 3) $G_3 = \text{Lip}(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n que satisfacen una condición de Lipschitz en una vecindad de

cada punto de su dominio. (D. Sullivan ha demostrado que toda variedad topológica es una tal G -variedad).

- 4) $G_4 = \text{Diff}_r(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los difeomorfismos locales de \mathbb{R}^n , de clase C^r , $1 \leq r \leq \omega$.
- 5) $G_5 = \text{Diff}_r^+(\mathbb{R}^n)$: el subconjunto de G_4 de difeomorfismos locales que preservan la orientación.
- 6) $G_6 = \text{Hol}(\mathbb{C}^n)$: el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de \mathbb{C}^n que son biholomorfismos.
- 7) $G_7 = \text{Fol}_K^r(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los difeomorfismos locales, de clase C^r , de \mathbb{R}^n que preservan la estructura horizontal del producto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{n-K}$ de \mathbb{R}^n , ($0 \leq K \leq n$), es decir de la forma $\phi(x,y) = (f(x,y), g(y))$.
- 8) $G_8 = \text{Af}(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de los homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n que son restricciones de transformaciones afines de \mathbb{R}^n .
- 9) $G_9 = \text{Sim}(\mathbb{R}^n)$: el subconjunto de G_8 que consiste de homeomorfismos locales de \mathbb{R}^n que son restricciones de similitudes de \mathbb{R}^n .
- 10) $G_{10} = \text{Iloc}(\mathbb{R}^n)$: el subconjunto de G_9 que consiste de las isometrías locales de \mathbb{R}^n .

En los ejemplos anteriores algunos de los pseudogrupos eran subseudogrupos de otros. Un subseudogrupo de un pseudogrupo G es un subconjunto $G_0 \subset G$, de G tal que G_0 es un pseudogrupo, es decir, los elementos de G_0 satisfacen 1), 2), 3) y 4).

Es conveniente ampliar la definición de pseudogrupo para permitir pseudogrupos de homeomorfismos locales de una variedad arbitraria y no solamente de \mathbb{R}^n .

4.5. DEFINICION. Un seudogruppo de homeomorfismos locales de una variedad variedad M , es un subconjunto G de homeomorfismos locales de abiertos de M sobre abiertos de M que satisface las mismas propiedades 1), 2), 3) y 4) de la definici3n 4.2.

EJEMPLOS.

- 11) $G_{11} = TI(G)$: el seudogruppo de los homeomorfismos locales del grupo de Lie G , que son restricciones de translaciones izquierdas de G . De manera an3loga se define el seudogruppo $TD(G)$ de las translaciones derechas de G .
- 12) $G_{12} = Proj(n)$: el seudogruppo de los homeomorfismos locales de \mathbb{P}^n que son restricciones de transformaciones proyectivas de \mathbb{P}^n .
- 13) $G_{13} = Iloc(M)$: el seudogruppo de los homeomorfismos locales de M que son restricciones de isometr3as de M con respecto a una m3trica riemanniana completa.
- 14) $G_{14} = Euc(n)$: el seudogruppo del tipo 13) cuando M es el espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Se tiene $G_{14} = G_{10}$.
- 15) $G_{15} = Elip(n)$: el seudogruppo del tipo 13) cuando M es la esfera S^n con su m3trica estandar.
- 16) $G_{16} = Hip(n)$: el seudogruppo del tipo 13) cuando M es el espacio hiperb3lico \mathbb{H}^n .

4.6. DEFINICION. Si G es un seudogruppo de homeomorfismos locales de la variedad X , entonces una (G, X) -variedad es una variedad M junto con un X -atlas cuyos cambios de coordenadas pertenecen a G , en otras palabras:

M tiene un atlas modelado en X , $A = \{(\phi_i, U_i); i \in I\}$ donde U_i es un abierto de M y $\phi_i: U_i \rightarrow \phi_i(U_i)$ es un homeomorfismo de U_i sobre el abierto $\phi_i(U_i)$ y los cambios de coordenadas,

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j),$$

pertenecen a G . Un tal atlas se llama una G -estructura de M .

Las (G, X) -variedades tienen diversas propiedades y nombres que vamos a enlistar a continuación:

- 1) Una G_1 -variedad es simplemente una variedad topológica de dimensión n y G_1 es, en cierto sentido, el pseudogrupo universal que contiene a todo pseudogrupo n -dimensional.
- 2) Una G_2 -variedad es una n -variedad orientable.
- 3) Una G_3 -variedad se llama una n -variedad lipschitziana y como se había mencionado antes toda variedad topológica tiene una G_3 -estructura, por un resultado de Sullivan.
- 4) Una G_4 -variedad es una n -variedad diferenciable de clase C^r y su G_4 -estructura se llama también su estructura diferenciable. Un ejemplo célebre de Kervaire consiste de una variedad topológica de dimensión 9 que no posee una G_4 -estructura.
- 5) Una G_5 -variedad es una variedad de dimensión n diferenciable y orientable.
- 6) Una G_6 -variedad es una variedad analítico-compleja de dimensión compleja n .
- 7) Una G_7 -variedad es una n -variedad diferenciable con una foliación de dimensión k y de clase C^r .

- 8) Una G_8 -variedad se llama una n -variedad localmente afín. Una G_8 -estructura se llama estructura afín.
- 9) Una G_9 -variedad se llama una n -variedad de similitud y su G_9 -estructura se llama su estructura de similitud.
- 10) Una G_{10} -variedad se llama, alternativamente, una variedad riemanniana plana, variedad euclidiana o variedad parabólica. Su estructura se llama estructura euclidiana. Toda variedad riemanniana plana hereda de \mathbb{R}^n su métrica: tal variedad es localmente isométrica a \mathbb{R}^n . Un teorema de Bieberbach dice que toda n -variedad riemanniana plana, M , compacta, tiene un recubrimiento finito que es isométrico con un toro plano. Luego M es recubierta universal e isométricamente por \mathbb{R}^n . El grupo fundamental de M conmuta con n translaciones linealmente independientes de \mathbb{R}^n y da origen a una configuración cristalográfica de \mathbb{R}^n (un panel de abejas n -dimensional) por tal motivo a M se le llama también una variedad cristalográfica y a su grupo fundamental se le llama un grupo cristalográfico. Para cada n existe solamente un número finito de variedades riemannianas planas no difeomorfas: salvo similitud y subdivisión hay solamente un número finito de panales de abejas de dimensión n .
- 11) Una G_{11} -variedad se llama una variedad localmente de Lie, modelada en el grupo de Lie G . Si se considera una métrica riemanniana de G que sea invariante bajo translaciones izquierdas, entonces una G_{11} -variedad hereda una métrica riemanniana. Análogamente, G hereda una medida de Borel que proviene de la medida de Haar, invariante por la izquierda, de G . Hay una manera natural de construir variedades

- modeladas en un grupo de Lie G : Si Γ es un subgrupo discreto de G , entonces la variedad cociente G/Γ es una tal variedad. En muchos casos toda variedad con una G_{11} -estructura es de este último tipo.
- 12) Una G_{12} -variedad se llama una variedad localmente proyectiva. Como ejemplos de tales variedades podemos citar a los espacios lenticulares que se puedan recubrir por un proyectivo \mathbb{P}^n .
- 13) Una G_{13} -variedad se llama una variedad localmente isométrica a M . Hay una manera canónica de construir tales variedades: Si $I(M)$ es el grupo de isometrías de la variedad riemanniana M y si $\Gamma \subset I(M)$ es un subgrupo que actúa libre, propia y discontinuamente en M entonces el espacio de órbitas M/Γ es de manera natural una $I\text{Loc}(M)$ -variedad y posee una métrica tal que la proyección canónica $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$ es una isometría local (y un recubrimiento).
- 14) Aquí todo coincide con lo dicho en 10).
- 15) Una G_{15} -variedad se llama una variedad elíptica. Toda variedad elíptica compacta se obtiene así: sea $\Gamma \subset O(n+1, \mathbb{R})$ un subgrupo finito del grupo ortogonal que actúa libre e isométricamente en S^n . Entonces S^n/Γ es una variedad elíptica y toda variedad elíptica compacta es isométrica a S^n/Γ para algún Γ . Luego toda variedad elíptica compacta es isométrica con una variedad lenticular (así llamamos a las variedades del tipo S^n/Γ). Las variedades elípticas coinciden con las variedades riemannianas con curvatura seccional constante 1.
- 16) Una G_{16} -variedad se llama una variedad hiperbólica de dimensión n . Su G_{16} -estructura la llamamos su estructura hiperbólica. Las variedades hiperbólicas son las variedades con curvatura seccional nega-

tiva. Si la variedad es completa entonces es isométrica a una variedad cociente \mathbb{H}^n/Γ , donde $\Gamma \subset I(\mathbb{H}^n)$ es un subgrupo discreto que actúa propia, libre y discontinuamente en \mathbb{H}^n .

Un teorema de M. Hirsch dice que toda variedad abierta M (es decir, no compacta y sin frontera), con haz tangente trivial, posee una submersión diferenciable en un espacio euclidiano de su misma dimensión. Por lo tanto, toda variedad abierta de dimensión n admite una submersión diferenciable en cualquier variedad de dimensión n . Luego, toda variedad abierta paralelizable de dimensión n tiene una (G,X) -estructura donde G es un pseudogrupo arbitrario en la variedad n -dimensional arbitraria X . Por ejemplo: toda variedad paralelizable abierta de dimensión par tiene una estructura analítico-compleja. Como consecuencia de lo anterior vemos que para poder empezar una clasificación de (G,X) -estructuras es necesario restringir tanto las variedades que queremos clasificar, como la naturaleza de G . Más adelante introduciremos el concepto de completéz para (G,X) -estructuras donde X es una variedad real analítica y G es un grupo de Lie que actúa analíticamente en X . Muchos de los ejemplos de pseudogrupos dados tienen la propiedad siguiente: son restricciones a abiertos, de una variedad real-analítica X , de los difeomorfismos de una acción de un grupo de Lie G , que actúa analíticamente en X . Esto motiva la siguiente

4.7. DEFINICION. Un (G,X) -pseudogrupo, donde X es una variedad real analítica y G es un grupo de Lie que actúa efectiva y analíticamente en X (y cuyos elementos $g \in G$ los identificamos con los difeomorfismos analíticos $g:X \rightarrow X$ determinados por la acción), es un pseudogrupo G de homeomorfismos

locales de X que son restricciones de elementos de G .

4.8. DEFINICION. Una (G,X) -variedad es una variedad con un atlas cuyos cambios de coordenadas pertenecen a un (G,X) -pseudogrupo.

EJEMPLOS.

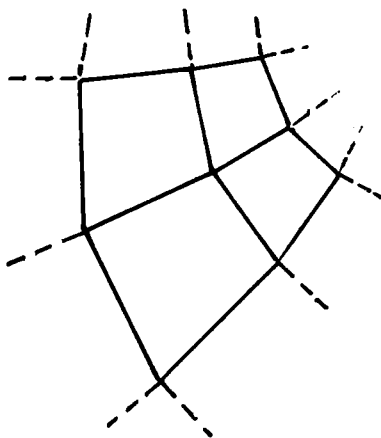
- 1) $(\text{Af}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$; $\text{Af}(\mathbb{R}^n)$ = grupo afín de \mathbb{R}^n .
- 2) $(\text{Sim}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$; $\text{Sim}(\mathbb{R}^n)$ = grupo de similitudes de \mathbb{R}^n .
- 3) $(\text{Sim}_p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$; $\text{Sim}_p(\mathbb{R}^n)$ = grupo de similitudes puras de \mathbb{R}^n .
- 4) $(I(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$; $I(\mathbb{R}^n)$ = grupo de isometrías de \mathbb{R}^n .
- 5) $(O(n+1, \mathbb{R}), S^n)$; $O(n+1, \mathbb{R})$ = grupo de isometrías de S^n .
- 6) $(\text{PL}(n, \mathbb{R}), \mathbb{P}^n)$; $\text{PL}(n, \mathbb{R})$ = grupo de transformaciones proyectivas de \mathbb{P}^n .
- 7) $(\text{PSL}(2, \mathbb{C}), \hat{\mathbb{C}})$; $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ = grupo de transformaciones conformes de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.
- 8) $(I(\mathbb{H}^n), \mathbb{H}^n)$; $I(\mathbb{H}^n)$ = grupo de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .

4.9. Algunos ejemplos de (G,X) -variedades, donde (G,X) pertenece a la lista previa.

- 1) El toro $T^2 = S^1 \times S^1$ se obtiene como el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, luego es una variedad riemanniana plana: tiene una $(I(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructura.
- 2) El toro T^2 se obtiene de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ al tomar el cociente de \mathbb{C}^* obtenido al identificar las órbitas de $T: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $T(z) = \lambda z$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| \neq 1$. Luego el toro también tiene una estructura de similitud, es decir, una $(\text{Sim}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructura.

- 3) T^2 tiene muchas estructuras de similitud que se construyen geométricamente de la manera siguiente: se toma un cuadrilátero simple en \mathbb{R}^2 y se identifican los lados opuestos con las (únicas) similitudes de \mathbb{R}^2 que preservan la orientación y que identifican a los lados opuestos del cuadrilátero. Ya que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 2π el lector puede comprobar que no hay problema en los vértices (ver Figura 51).

Fig. 51



Cuadriláteros semejantes que dan una estructura de similitud a T^2 .

- 4) T^2 posee muchas estructuras afines que no son ni euclidianas ni de similitud. Por ejemplo, sean A, B las dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r > 1.$$

Entonces A y B conmutan y generan un grupo abeliano y libre en dos generadores. Este grupo actúa propia, libre y discontinuamente en el hemiplano superior de \mathbb{R}^2 y el espacio cociente es el toro T^2 . En la

siguiente figura (Figura 52) se muestra un dominio fundamental y algunas de sus imágenes:

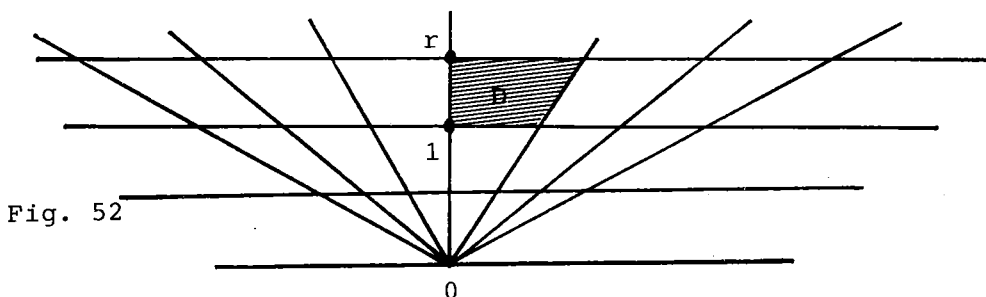


Fig. 52

Existen muchos ejemplos análogos a este que se obtienen identificando los lados opuestos de un cuadrilátero mediante transformaciones afines.

- 5) El toro n -dimensional $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ posee, obviamente, una estructura euclidiana pero no posee una estructura de similitud (que no sea euclidiana) si $n > 2$. El toro T^n posee muchas estructuras afines que no son euclidianas y que se obtienen de una manera análoga a la del ejemplo 4). Para $n = 3$, esta construcción equivale a identificar las caras opuestas de un poliedro convexo, cuyas seis caras son cuadriláteros, mediante transformaciones afines.
- 6) $S^n \times S^1$ tiene una estructura de similitud para toda $n \geq 1$: $S^n \times S^1$ es el cociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, formado por las órbitas de $T(x) = \lambda x$; $\lambda > 1$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.
- 7) Todas las variedades que fibran diferenciablemente sobre el toro

k -dimensional con fibra el toro n -dimensional tienen una estructura afín: se obtienen de \mathbb{R}^{n+k} al tomar el cociente bajo un grupo discreto de las transformaciones afines de \mathbb{R}^{n+k} de la forma

$$x \mapsto A(x) + b,$$

donde $A \in \text{SL}(n+k, \mathbb{Z})$.

- 8) Como ya vimos todos los espacios lenticulares tienen una $(0(n+1, \mathbb{R}), S^n)$ -estructura.
- 9) El teorema de uniformización de Koebe y Poincaré implica que toda superficie orientable y metrizable tiene una $(\text{PSL}(2, \mathbb{C}), \hat{\mathbb{C}})$ estructura. (Más adelante construiremos algunas.)
- 10) Teorema de Thurston: Si M^3 es una variedad cerrada atoroidal y de tipo de Haken, entonces M^3 admite una estructura hiperbólica. Donde: Atoroidal significa que ningún toro encajado en M^3 inyecta a su grupo fundamental y de tipo de Haken quiere decir que el recubrimiento universal de M^3 es \mathbb{R}^3 y M^3 posee una superficie orientable, encajada, distinta de S^2 , que inyecta a su grupo fundamental.
- 11) Toda superficie M^2 , compacta, orientable y de género g , tiene una estructura hiperbólica cuando $g > 1$. La construcción clásica es la siguiente:
- Sea $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ el modelo proyectivo de \mathbb{H}^2 cuyas líneas geodésicas son segmentos de recta euclidiana. Sea P el polígono regular euclidiano con $4g$ lados y cuyos vértices están en ∂D^2 . Entonces P representa a un polígono hiperbólico ideal cuyo ángulo en sus vértices ideales es cero. Sea tP ; $0 < t < 1$ el polígono que se obtiene al aplicarle a P la

similitud $(x,y) \mapsto (tx,ty)$. Cuando t está cercano a cero, el polígono tP está cerca del origen. Ya vimos que este modelo proyectivo se obtiene componiendo la proyección estereográfica desde el polo norte en el hemisferio sur con la proyección ortogonal del hemisferio sur sobre D^2 . La derivada en el origen, de esta composición, es la identidad, luego los ángulos hiperbólicos de tP , considerado como un polígono hiperbólico, difieren poco de los ángulos euclidianos cuando t es pequeño. Las rotaciones euclidianas en el origen son isometrías hiperbólicas en el modelo proyectivo, luego, para toda $t \in (0,1]$ el polígono hiperbólico P_t es un polígono regular. Los ángulos internos de P_t varían continuamente de 0 a $\pi(2g-1)/(2g)$ cuando $t \rightarrow 0$; por lo tanto, existe $t_0 \in (0,1]$ tal que los ángulos internos de P_{t_0} son $\pi/(2g)$. El polígono P_{t_0} es un polígono hiperbólico regular y cualesquiera dos de sus aristas son isométricas. Numeremos cíclicamente sus $4g$ aristas con los siguientes $4g$ símbolos:

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}; a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}; \dots; a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}.$$

Identifiquemos para cada i , $1 \leq i \leq g$, a la arista a_i con la arista a_i^{-1} con la única isometría hiperbólica que preserva la orientación de \mathbb{H}^2 pero que invierte la orientación de a_i con respecto a una orientación fija de la frontera del polígono. Identifíquense b_i con b_i^{-1} de manera análoga. Entonces, el espacio obtenido al identificar, por el proceso descrito, a las aristas del polígono P_{t_0} , es una superficie orientable de género g (ver Figura 53 para el caso $g = 2$). Aún más, la superficie M_g tiene una estructura diferenciable y una

métrica riemanniana naturales que provienen del hecho de que las aristas fueron identificadas mediante isometrías y de que la suma de los ángulos en los vértices del polígono P_{t_0} es 2π . Por así decirlo, todo se ensambla bien.

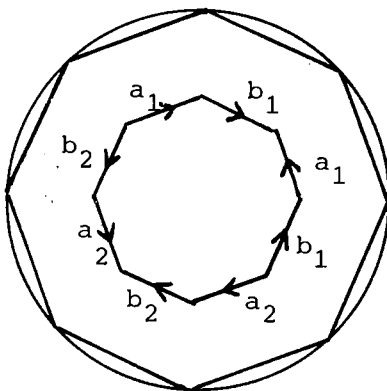


Fig. 53

La demostración rigurosa de las afirmaciones hechas en el párrafo anterior es la siguiente versión particular de un teorema de Poincaré:

Teorema de Poincaré: Sea P un polígono hiperbólico convexo contenido en el plano hiperbólico \mathbb{H} . Supóngase que el conjunto de sus aristas se descompone como una unión ajena $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ y que para $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una isometría $T_i: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, que preserva la orientación de \mathbb{H} y que lleva isométricamente a_i sobre b_i invirtiendo la orientación inducida en la arista a_i por una orientación de la frontera del polígono. Supóngase que todos los vértices se pueden identificar con una composición de los $\{T_i\}$ y que la suma de los

de los ángulos internos del polígono es 2π . Entonces si $\Gamma \subset I(\mathbb{H}^2)$ es el grupo generado por $\{T_1, \dots, T_n\}$, Γ es discreto en $I(\mathbb{H}^2)$ y P es un dominio fundamental de Γ , es decir, la órbita, bajo Γ , de todo punto de \mathbb{H} corta a P . Además, cada Γ -órbita corta al interior de P en a lo más un punto y el espacio cociente \mathbb{H}/Γ se obtiene de P al identificar las aristas de P mediante las isometrías T_i , $i = 1, \dots, n$.

Este teorema de Poincaré nos dice que el conjunto de las imágenes de P bajo el grupo Γ , $\{g(P); g \in \Gamma\}$, cubren a todo \mathbb{H}^2 y si $g, h \in \Gamma$ entonces los polígonos hiperbólicos $g(P)$ y $h(P)$ son disjuntos o se intersecan a lo largo de una arista común: se tiene \mathbb{H}^2 cubierto por "mosaicos".

En el caso de la superficie de género g la construcción anterior nos demuestra que toda superficie de género g , orientable, es homeomorfa a un espacio cociente \mathbb{H}^2/Γ donde $\Gamma \subset I_+(\mathbb{H}^2)$ es un subgrupo que actúa libre, propia y discontinuamente en \mathbb{H}^2 , luego, induce una métrica completa con curvatura negativa en M_g y la proyección $\pi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma \approx M_g$ es un recubrimiento que es una isometría local.

Dada una superficie M , hiperbólica, orientable y de género $g > 1$, es posible obtener muchas otras a partir de M usando un proceso que consiste en "cortar" y "pegar" a lo largo de geodésicas cerradas simples de igual longitud. Para justificar este proceso enunciemos un teorema de carácter general:

4.10. PROPOSICION (Teorema de Ensambladura). Sean M y N variedades diferenciables, riemannianas, de dimensión $n > 1$ y con fronteras no vacías

$M_1 = \partial M$; $N_1 = \partial N$. Supóngase que M_1 y N_1 son totalmente geodésicas en M y N , respectivamente. Sea $\phi: M_1 \rightarrow N_1$ una isometría y sea V el espacio topológico que se obtiene al "pegar" M con N a lo largo de sus fronteras mediante la isometría $\phi: x \in M_1$ se identifica con $\phi(x) \in N_1$. Entonces:

- 1) V tiene una única estructura diferenciable y una métrica riemanniana tal que:
- 2) las inclusiones naturales $i_1: M \rightarrow V$; $i_2: N \rightarrow V$ son isometrías entre variedades riemannianas.

Bosquejo de Demostración: En una variedad riemanniana existe una manera natural de elegir una carta local en uno de sus puntos: la función exponencial en el punto. Si x es un punto en $M_1 = \partial M$ y le agregamos un collar a M a lo largo de su frontera y extendemos la métrica de M a esta nueva variedad más grande, entonces las hipótesis implican que un entorno en M_1 , del punto x , es la imagen bajo la función exponencial en x , de un hiperplano tangente a M_1 en x . Se tiene una situación análoga en el punto $\phi(x) \in N_1 = \partial N$. La demostración de la proposición se sigue de demostrar que las funciones Exp_x y $\text{Exp}_{\phi(x)}$ se pueden "ensamblar" para obtener la función exponencial en V . Los detalles son más difíciles de escribir que de entender.

La proposición (4.10) da otra demostración de la validez de la construcción, a partir de un polígono, de una estructura hiperbólica en una superficie de género g . Existe una infinidad de polígonos irregulares de $4g$ lados, a partir de los cuales se pueden obtener estructuras hiperbólicas de M_g . De hecho, cada M_g , $g > 1$, posee una infinidad de estructuras hiper-

bólicas no isométricas y éstas se pueden parametrizar con una variedad de dimensión $6g-6$ (el número $6g-6$ se obtiene contando el número de parámetros de los polígonos citados):

4.11. NOTA. Las hipótesis de la proposición 4.10 son absolutamente necesarios: Las fronteras tienen que ser, además de isométricas, totalmente geodésicas.

4.12. NOTA. La proposición 4.10 sigue siendo válida si en lugar de considerar dos variedades se considera la variedad obtenida de una variedad riemanniana al identificar dos a dos ciertas componentes de su frontera, que son isométricas y totalmente geodésicas.

5. ALGUNAS VARIETADES CON ESTRUCTURA HIPERBOLICA

5.1. EJEMPLOS.

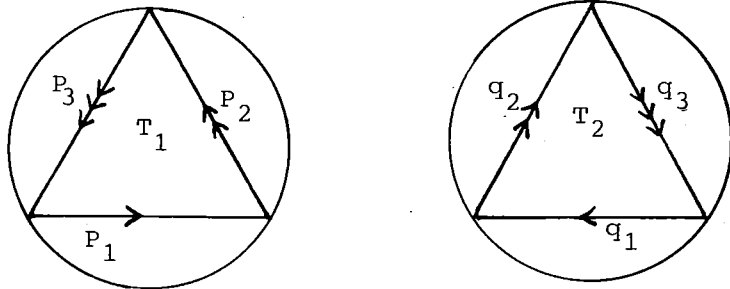
- 1) Considérese el toro plano $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Sea $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la proyección recubridora localmente isométrica. La recta de \mathbb{R}^2 , cuya ecuación es

$$y = \frac{a}{b}x,$$

donde a, b son enteros relativamente primos se proyecta en una geodésica de T^2 de longitud a^2+b^2 . Esta geodésica es una curva cerrada simple a lo largo de la cual cortamos a T^2 para obtener un cilindro C . Si ahora pegamos las dos componentes del cilindro con una isometría: una rotación, entonces se vuelve a obtener un toro plano. Este toro en general no es isométrico al original. Se puede demostrar que todas las estructuras euclidianas de T^2 , de área uno, se obtienen por este proceso.

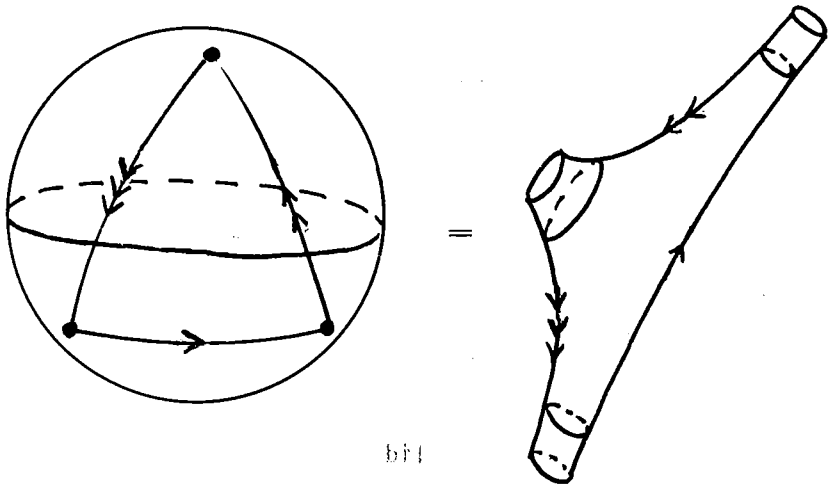
- 2) Considérese dos triángulos hiperbólicos ideales como en la siguiente figura (Figura 54) en el modelo proyectivo:

Fig. 54



Suprímense los vértices ideales de los triángulos T_1 y T_2 para, así, obtener superficies hiperbólicas con fronteras geodésicas. Identifíquese el lado p_i con el lado q_i , con la orientación indicada por las flechas, mediante isometrías $T_i: p_i \rightarrow q_i$; ($i = 1, 2, 3$). De esta manera se obtiene una superficie hiperbólica homeomorfa al complemento de tres puntos distintos de S^2 (ver Figura 55):

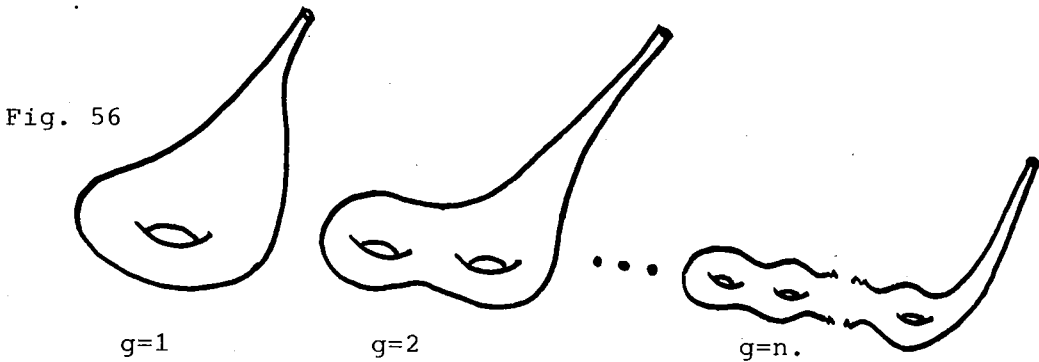
Fig. 55



No importa qué triángulos escogimos puesto que todos los triángulos ideales son isométricos. Existe una infinidad de isometrías $T_i: p_i \rightarrow q_i$ que las podemos parametrizar con los puntos de \mathbb{R}^3 de la manera siguiente: sean a_1, a_2 y a_3 puntos en p_1, p_2 y p_3 y sean b_1, b_2 y b_3 puntos de q_1, q_2 y q_3 . A la terna (T_1, T_2, T_3) le asignamos la terna de números reales (r_1, r_2, r_3) donde r_i es la distancia orientada (por la orientación de la dirección de las flechas) de $T_i(a_i)$ a b_i . Después demostraremos que existe un sólo valor (r_1, r_2, r_3) tal que la superficie $M(r_1, r_2, r_3)$ es completa.

2') Considérese en el modelo proyectivo de \mathbb{H}^2 representado por el disco

D^2 el polígono hiperbólico ideal de $4g$ lados que corresponde al polígono regular con vértices en ∂D^2 . Si ahora se identifican los lados dos a dos, mediante rotaciones euclidianas, con la identificación canónica que da origen a la superficie de género g (con $g \geq 1$) se obtiene una superficie hiperbólica completa homeomorfa a la superficie de género g , menos un punto (Figura 56):



El ejemplo 1) en el caso completo, corresponde a identificar lados contiguos de un cuadrado mediante una reflexión en la diagonal (Figura 57):

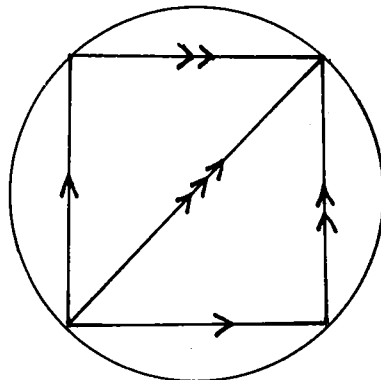
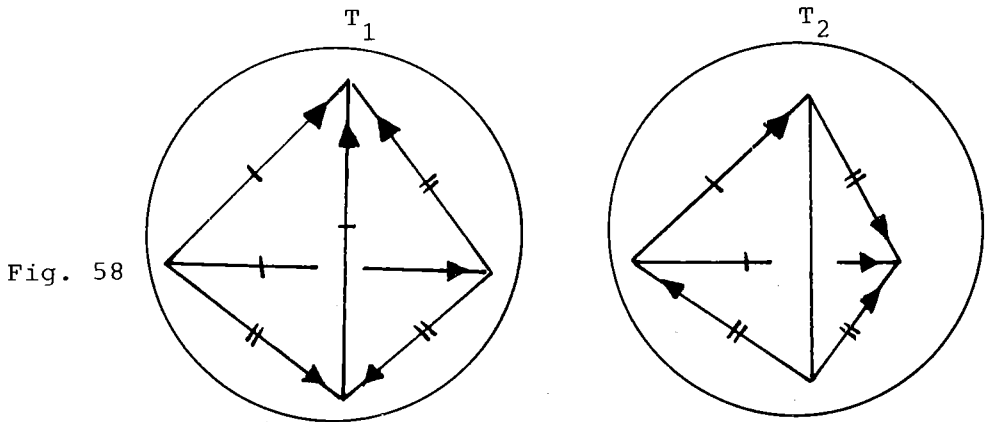


Fig. 57

- 3) En el modelo proyectivo tridimensional, representado como el disco D^3 , considérense dos tetraedros arbitrarios T_1 y T_2 con sus vértices en el infinito y con sus aristas orientadas y marcadas como en la siguiente figura (Figura 58):



Existe una única manera de identificar cada cara de T_1 con una cara de T_2 de tal manera que las aristas se correspondan en orientación y marcas, mediante isometrías. El espacio topológico obtenido al suprimir los vértices tanto de T_1 como T_2 es homeomorfo al complemento en S^3 del nudo "con forma de ocho" (figure eight knot) (Figura 59):

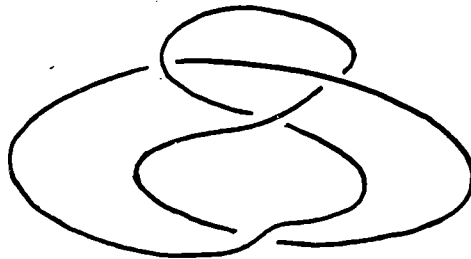


Fig. 59

Denotemos con el símbolo [8] a tal nudo (o mejor dicho a la clase de isotopía de dicho nudo). En general, si T_1 y T_2 son arbitrarios no existe una estructura hiperbólica en la variedad $M(T_1, T_2)$ obtenida al pegar isométricamente las caras de T_1 y T_2 (según el patrón combinatorio indicado) de tal manera que las inclusiones de T_1 y T_2 sean isometrías locales. De hecho, las configuraciones posibles de T_1 y T_2 que dan origen a una estructura hiperbólica de $M(T_1, T_2)$ se pueden parametrizar con una región del plano complejo y solamente un sólo valor de este parámetro nos da una estructura hiperbólica completa: el valor que corresponde al caso en que T_1 y T_2 son isométricos con el tetraedro hiperbólico ideal que corresponde al tetraedro euclidiano regular cuyas caras son triángulos euclidianos equiláteros. Luego, S^3 - [8] posee una infinidad de estructuras hiperbólicas incompletas y exactamente una completa. La región $\Omega \subset \mathbb{C}$ que parametriza a las variedades $M(T_1, T_2)$ que admiten una estructura hiperbólica corresponde a una relación funcional que debe existir entre los "parámetros" de los tetraedros T_1 y T_2 . Sea M_ω la variedad hiperbólica que corresponde a $\omega \in \Omega$. Para una infinidad de valores de ω la completación métrica de M_ω es una variedad de dimensión tres obtenida haciendo cirugía de Dehn a lo largo del nudo [8]. Para una infinidad de valores de ω la completación M_ω es, además, una variedad hiperbólica cerrada, o bien, algún recubrimiento cíclico finito ramificado a lo largo del nudo que corresponde a los puntos que hay que agregar a M_ω para obtener M_ω . Esta bellísima construcción geométrica es debida a William Thurston y nosotros expondremos algunos de sus puntos

un poco más adelante.

Cabe hacer notar que R. Riley [Ril] había encontrado en 1975 una estructura hiperbólica completa en S^3 - [8] (y por el teorema de Mostow la única estructura completa) de la manera siguiente:

Existe un monomorfismo $\psi: \pi_1(S^3 - [8]) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que su imagen es un subgrupo discreto. Luego esta imagen, Γ , actúa propia, libre y discontinuamente en \mathbb{H}^3 y da origen a una variedad hiperbólica completa \mathbb{H}^3/Γ que es homeomorfa $S^3 - [8]$ (esto último se sigue, por ejemplo, del teorema de fibración de Stallings o bien, construyendo un dominio fundamental de Γ y viendo que al identificar sus caras se obtiene $S^3 - [8]$).

La construcción de Thurston es invariante bajo la siguiente involución:

Supóngase que T_1 y T_2 corresponden a el tetraedro euclidiano regular. Si $p \in T_1$ es cualquier punto propio de T_1 entonces sean p_1, p_2, p_3 y p_4 los pies de las perpendiculares de p a las caras A, B, C y D , de T_1 . Sean q_1, q_2, q_3 y q_4 los puntos de T_2 que corresponden a p_1, p_2, p_3 y p_4 bajo las isometrías que identifican las caras para obtener $S^3 - [8]$. Dejo al lector verificar que las perpendiculares en los puntos q_1, q_2, q_3 y q_4 a las caras en las que se encuentran estos son concurrentes en un punto $q \in T_2$. La correspondencia $p \rightarrow q$ es una involución. Lo anterior no es totalmente correcto: si p pertenece a una arista entonces p se identifica con tres puntos distintos de T_2 , sin embargo, al tomar el espacio cociente la correspondencia sí está bien definida. Esta construcción la encontré tratando de ver, geométricamente, como se pasa de la construcción de Thurston a la construcción de Gieseking: se toma el tetraedro regular y se identifican dos caras mediante una rotación en su arista común y después las dos

caras restantes mediante una rotación en su arista común. Se obtiene una variedad no orientable, hiperbólica completa que tiene como recubrimiento doble orientable al complemento del nudo [8]. Este ejemplo fue encontrado en 1912 y está muy bien explicado en el último capítulo del libro de W. Magnus [Mag], sin embargo, Gieseking no relaciona a su ejemplo con el nudo [8].

El análisis que hace Thurston de las completaciones de las variedades M_ω lo lleva a concluir el siguiente:

5.2. TEOREMA (Theorem 4.7 en [Thu]). Todas las variedades, $M(\alpha, \beta)$ que se obtienen de S^3 haciendo cirugía de Dehn con invariantes (α, β) ; $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, en el nudo [8] son variedades hiperbólicas excepto las variedades cuyos invariantes son $(\pm\alpha, \pm\beta)$ donde (α, β) varía en la lista: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ y $(4, 1)$. Hay solamente seis excepciones puesto que $M(\alpha, \beta) = M(-\alpha, \beta) = M(-\alpha, -\beta)$. Ninguna de estas seis variedades posee una estructura hiperbólica.

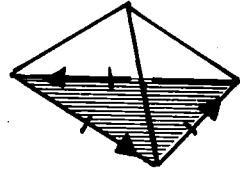
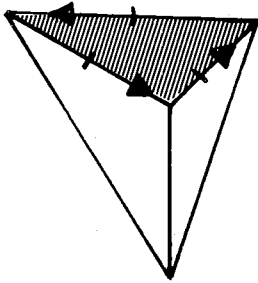
En este teorema $(1, 0)$ corresponde a una longitud y $(0, 1)$ a un meridiano. Es evidente que $M(\alpha, \beta) = M(\alpha, -\beta)$ la ecuación $M(\alpha, \beta) = M(-\alpha, \beta)$ se sigue del hecho de que el nudo [8] es isotópico a un nudo transversal y simétrico con respecto a un plano. Luego hay un difeomorfismo (la reflexión en el plano) que cambia a una longitud por su negativo.

5.3. Ejemplo de una variedad hiperbólica con frontera totalmente geodésica

Considérese dos tetraedros T_1 y T_2 como en la siguiente figura (ver

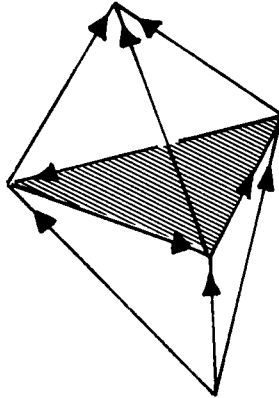
Figura 60):

Fig. 60



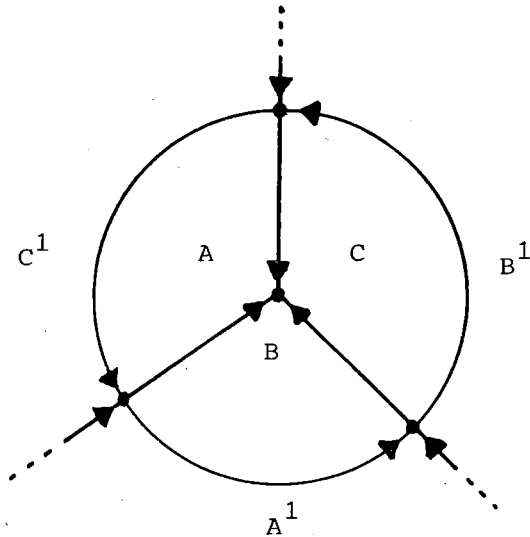
Identifiquense las caras sombreadas para obtener un octaedro como en la siguiente figura (Figura 61):

Fig. 61



Ahora removemos el vértice inferior para aplanar el grafo formado por las aristas, haciendo corresponder el vértice inferior al punto ∞ en $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Orientamos las aristas y nombramos las caras con las letras A, B, C y A^1 , B^1 , C^1 como en la Figura 62:

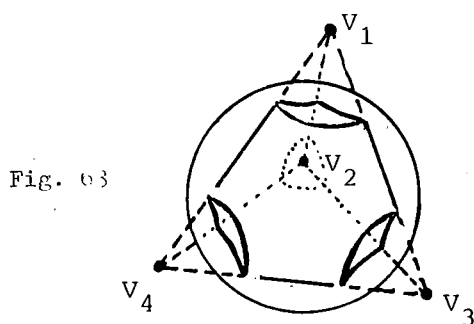
Fig. 62



Si consideramos a T_1 y T_2 como tetraedros hiperbólicos que forman parte de un octaedro hiperbólico ideal K , entonces existe una única manera de identificar la cara A con la cara A^1 , la cara B con la cara B^1 y la cara C con la cara C^1 , mediante isometrías y preservando la orientación de las aristas. Si se suprimen los vértices ideales el espacio de identificación es homeomorfo al interior de una variedad compacta y orientable cuya frontera es una superficie de género dos. Esta variedad compacta tiene una estructura hiperbólica tal que su frontera es totalmente geodésica. Thurston la construye así:

Considérese el tetraedro hiperbólico ideal que corresponde en el modelo proyectivo al tetraedro regular. Los ángulos diédricos hiperbólicos formados por este tetraedro son todos iguales a 60° su ángulo euclidiano tiene

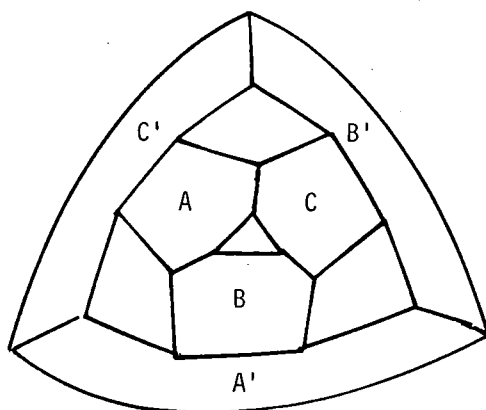
su seno igual a $1/\sqrt{3}$). Expandamos el tetraedro, usando similitudes en el origen hasta que el tetraedro se convierta en un tetraedro regular tangente a ∂D^3 . Vemos que el ángulo diédrico decrece de 60° a cero grados, luego, existe un tetraedro euclidiano que determina un cuerpo convexo hiperbólico cuya frontera son cuatro planos, cada uno de los cuales forma un ángulo diédrico de 30° con los otros tres, como en la siguiente figura (Fig. 63):



Este sólido convexo puede pensarse como si estuviérase formado por cuatro caras que son porciones de hiperplanos hiperbólicos y cuatro caras impropias en la esfera al infinito. Los vértices del tetraedro euclidiano del que se obtiene esta configuración son externos a la frontera de D^3 y determinan por lo tanto, sus planos polares $V_1^\perp, V_2^\perp, V_3^\perp$ y V_4^\perp , donde V_1, V_2, V_3 y V_4 son esos vértices. Si ahora truncamos el sólido con estos cuatro planos hiperbólicos se tiene un tetraedro truncado, hiperbólico y propio F formado por cuatro caras hexagonales y cuatro caras triangulares. El tetraedro truncado F es muy simétrico: se puede pasar de cualquier cara hexagonal a cualquiera otra y lo mismo ocurre con las caras triangulares. Los ángulos

diédricos formados por dos caras hexagonales es 30° y el ángulo diédrico formado por una cara triangular y una cara hexagonal es un ángulo recto. Si se toman dos copias de F , F_1 y F_2 , y se identifican dos caras hexagonales se tiene un hexaedro truncado cuyas seis caras hexagonales se pueden identificar con isometrías, según el patrón combinatorio descrito antes, que corresponde al siguiente esquema (Figura 64):

Fig. 64



Debido a la simetría de F , al identificar sus caras se obtiene una variedad hiperbólica, compacta y orientable M cuya frontera es una superficie de género dos con una triangulación con triángulos geodésicos formada por las caras triangulares de F . Al hacer la identificación todas las aristas se colapsan en una sola curva y la suma de los ángulos diédricos que se ensamblan en esta curva es 2π (ver Figura 65) ésta es una de las razones por las cuales M tiene una estructura hiperbólica.

Si se toman dos copias isométricas de M ; M_1 y M_2 y se ensamblan a lo largo de su frontera vía la función "identidad", entonces por la proposición 4.10 se obtiene una variedad cerrada (el doble de M).

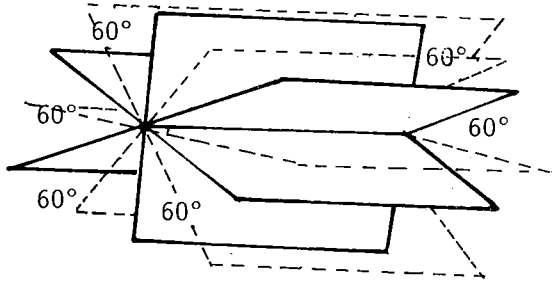


Fig. 65

5.4. Si se considera un octaedro euclidiano regular, con sus vértices en $S^2 = \partial D^3$, entonces este octaedro representa a un octaedro hiperbólico regular cuyos ángulos diédricos hiperbólicos en sus aristas son iguales a 90° . Para ver esto consideramos el modelo del hemiespacio superior que hace corresponder a un vértice del octaedro el punto ∞ de $\partial H^3 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$: las cuatro caras que contienen al vértice corresponden a cuatro planos verticales con ángulos diédricos iguales, luego, estos ángulos deben ser rectos. Sea K este octaedro regular hiperbólico, suprimiendo sus vértices (ver Figura 66).

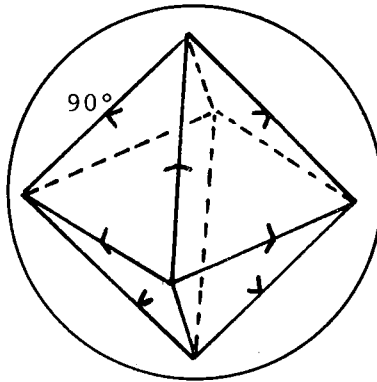


Fig. 66

Aplanemos la frontera del octaedro en $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ haciendo corresponder uno de los vértices al punto ∞ . Marquemos y orientemos las aristas como en el siguiente diagrama (Figura 67):

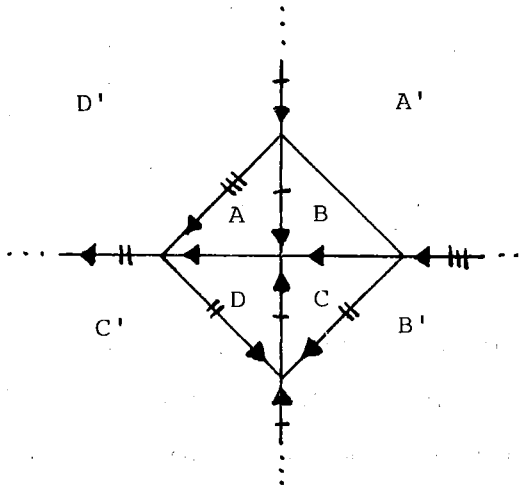
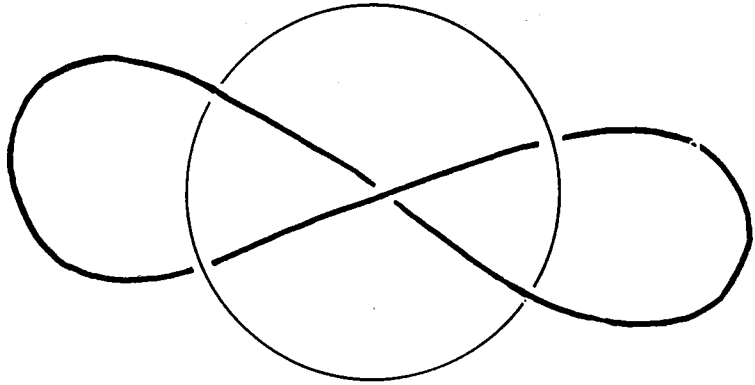


Fig. 67

Identifíquense en K la cara A con A^1 , B con B^1 , ..., etc., según la orientación y marcas de cada triángulo hiperbólico de K usando isometrías hiperbólicas: Se obtiene una variedad hiperbólica, no compacta y sin frontera, completa y difeomorfa a $S^3 - W$, donde W es el enlace de Whitehead, ilustrado en la Figura 68.

Luego, el complemento del enlace de Whitehead tiene una estructura hiperbólica completa. Posteriormente veremos que en efecto el espacio obtenido del octaedro es el complemento del enlace de Whitehead.

Fig. 68

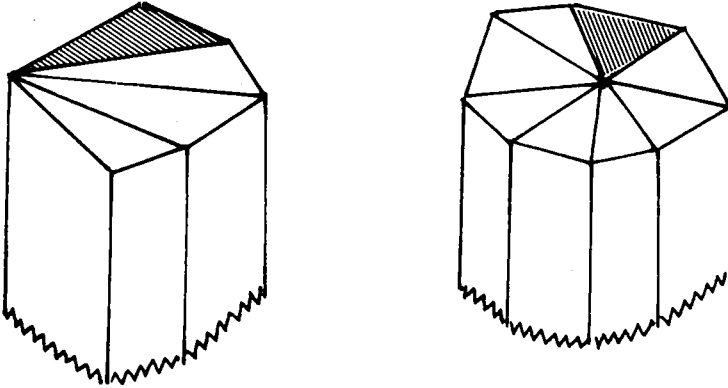


enlace de Whitehead.

5.5. Todos los ejemplos obtenidos hasta ahora provienen de ensamblar isométricamente a tetraedros ideales a lo largo de parejas de triángulos ideales en su frontera. El hecho de que objetos obtenidos así son variedades tridimensionales, cuando se suprimen los vértices, es un resultado clásico. Los puntos que pertenecen al interior de los tetraedros no se identifican con nadie, luego, al pasar al cociente siguen teniendo una vecindad homeomorfa a un disco abierto de \mathbb{R}^3 . Si un punto en la frontera de la unión de los tetraedros que se van a identificar no se identifica con ningún otro punto, entonces, al pasar al cociente tiene una vecindad homeomorfa a un hemiespacio cerrado. Un punto interior a un triángulo en la frontera de un tetraedro se identifica a lo más con otro punto y si esto ocurre, entonces, tiene una vecindad localmente euclidiana en el espacio cociente. Luego, el único problema estaría en las aristas (recordamos que todos los vértices se suprimieron). Es más o menos sencillo ver

que el conjunto de tetraedros que se unen en una arista al identificarlos dan una de las dos configuraciones locales mostradas en la Figura 69:

Fig. 69



Luego, los puntos en las aristas son enviados bajo la función de identificación en puntos que poseen una vecindad homeomorfa a un disco abierto de \mathbb{R}^3 o a un disco cerrado de \mathbb{R}^3 : el espacio cociente bajo la identificación es una variedad de dimensión tres, con o sin frontera. Si se incluyeran los vértices, el espacio de identificación no sería, en general, una variedad de dimensión tres. Es relativamente sencillo ver que todo vértice posee una vecindad cerrada homeomorfa al cono sobre una variedad de dimensión dos: la aureola (en inglés: link) de cada vértice es una superficie. Por lo tanto, para que el espacio cociente sea una variedad es necesario y suficiente que la aureola de cada vértice sea una esfera de dimensión dos. Si se considera una variedad M , de dimensión tres (no necesariamente conexa) y una triangulación de su frontera y dos subconjuntos ajenos $\{A_1, \dots, A_n\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ de simplejos de dimensión dos de la triangulación de la frontera se tiene:

5.6. PROPOSICION. Sean $T_i: A_i \rightarrow B_i$ homeomorfismos y sea M el espacio topológico obtenido al identificar los puntos de ∂M mediante la regla siguiente: x se identifica con $y \leftrightarrow$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $T_i(x) = y$. Entonces \hat{M} es variedad topológica \leftrightarrow la característica de Euler-Poincaré de \hat{M} es nula.

5.7. Todos los espacios topológicos que hemos obtenido en los ejemplos anteriores, obtenidos a partir de poliedros hiperbólicos, son variedades de dimensión tres. La parte difícil consiste en demostrar la existencia de una estructura hiperbólica y en determinar si tal estructura es completa, cuando esta exista. Tal existencia y completéz depende de la naturaleza y estructura de la aureola (link) de cada vértice impropio. Por tal motivo será necesario estudiar un poco más las propiedades de las variedades que poseé una (G, X) -estructura.

6.1. APLICACION DESARROLLADORA Y HOLONOMIA

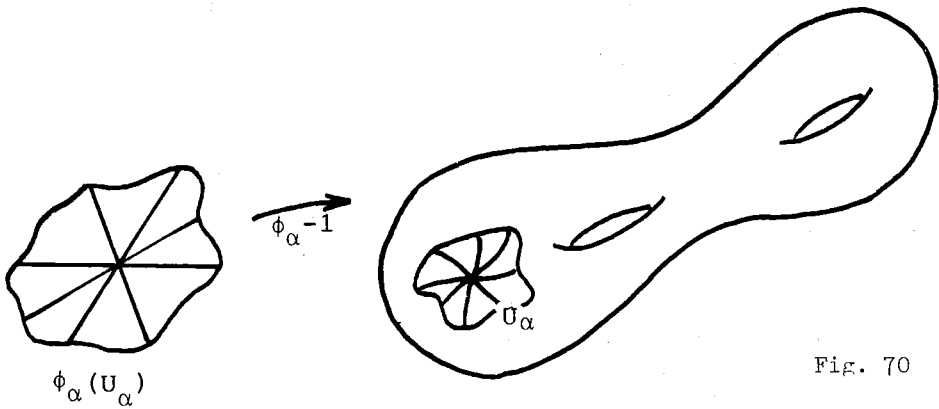
Cuando una variedad compacta posee una (G, X) -estructura, este hecho puede restringir mucho su topología; considere, por ejemplo, la siguiente:

6.2. PROPOSICION. Sea M una superficie compacta y orientable. Entonces M posee una (C^*, C) -estructura si y solo si M es el toro T^2 .

DEMOSTRACION. Recordemos que $C^* = C - \{0\}$ y que C^* actúa en C así: cada $a \in C^*$ corresponde a la transformación: $z \rightarrow az$. Luego, una (C^*, C) estructura en M es una estructura de similitudes puras. Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha); \alpha = 1, \dots, n\}$ un conjunto finito de cartas locales, $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow C$, tal que la unión de los U_α cubre a M y que $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ sea la restricción de una transformación del tipo $z \rightarrow az$, cuando esta composición esté definida, para toda pareja $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$.

AFIRMACION. Para toda α , $\phi_\alpha(U_\alpha)$ no contiene al origen. Para demostrar la afirmación, consideremos a la foliación singular de C que consiste del origen y de todos los rayos que emanan del origen, las funciones de transición $\phi_{\alpha\beta}$ preservan a esta foliación singular, luego, inducen una foliación en M con un número finito de singularidades que corresponden a $\phi_\alpha^{-1}(\{0\})$, $\alpha = 1, \dots, n$. De existir una singularidad, esta sería del tipo descrito en la Figura 70.

Ya que $\phi_{\alpha\beta}$ preserva orientación, es posible orientar a las curvas integrales del campo de líneas que determinan a la foliación en el complemento de las singularidades. Luego, el índice de Poincaré de cada singularidad



es 1. El teorema de Poincaré-Hopf implica que el número de singularidades es igual a la característica de Euler-Poincaré. Luego, si el género de M es mayor o igual a 1 y M tiene una (C^*, C) estructura, se sigue que $\phi(U_\alpha)$ no contiene al origen para $\alpha \in \{1, \dots, n\}$. Dejo al lector verificar que el caso $M = S^2$ es imposible usando el hecho de que se pueden orientar las curvas de la foliación. Si el género de M es positivo, la foliación construida anteriormente no tiene singularidades, luego $g = 1$ y M tiene que ser el toro T^2 , puesto que es orientable. (Q.E.D.)

La proposición 6.2 es un caso particular de un teorema de John Milnor:

6.3. TEOREMA (John Milnor). Las únicas superficies compactas que tienen una estructura afín (una $(\text{Af}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructura) son la botella de Klein y el toro T^2 .

La demostración de este teorema se puede encontrar en el libro de John

Milnor: Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press #76, Appendix C, págs. 289-314.

Sea M una (G, X) -variedad, donde G es un grupo de Lie que actúa analíticamente en la variedad real-analítica X . Sea $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ un recubrimiento arbitrario de M . Entonces, de la manera natural \tilde{M} hereda la (G, X) -estructura de M y por lo tanto es también una (G, X) -variedad.

Sea $\phi_0: U_0 \rightarrow \phi_0(U_0) = X$ una carta local en M , modelada en X y que pertenece a la (G, X) -estructura de M , se tiene:

6.4. PROPOSICION. Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ un camino continuo arbitrario pero tal que $\alpha(0) \in U_0$. Entonces: ϕ_0 tiene una continuación analítica a lo largo de α . Además, si $\beta: [0, 1] \rightarrow M$ es otro camino tal que $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ y β es homotópico a α , con una homotopía que fija a los extremos, entonces las continuaciones analíticas de ϕ_0 a lo largo de α y β , respectivamente, coinciden en una vecindad de $\alpha(1) = \beta(1)$.

DEMOSTRACION. Esta proposición es análoga al Teorema de Monodromía en la teoría de la variable compleja y nos da la posibilidad de "propagar" una carta local modelada en X usando el hecho de que las funciones de transición $\phi_{\alpha\beta}$ (o sea los cambios de coordenadas) son restricciones de difeomorfismos globales de X . La definición de continuación analítica de la carta local, a lo largo del camino α , es análoga a aquella de continuación analítica de funciones complejas: es una familia de cartas locales $\{(U_t, \phi_t); t \in [0, 1]\}$, tal que:

- 1) $\alpha(t) \in U_t, \forall t \in [0,1]$.
- 2) Si $t \in [0,1]$ entonces t tiene una vecindad $V(t)$, en $[0,1]$ tal que las cartas locales (U_t, ϕ_t) , para $t \in V(t)$, coinciden en la intersección de sus dominios.
- 3) Las cartas (U_t, ϕ_t) pertenecen a la (G, X) -estructura de M .

Como U_0 es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(t) \in U_0$ para $t \in [0, \delta]$. Si $\delta = 1$ se toma la familia $(U_t, \phi_t) = (U_0, \phi_0)$. Se toma $t_1 = \inf\{t; \alpha(t) \in U_0\}$, si $\delta \neq 1$, y se toma una carta local (U_{t_1}, ψ_1) , que pertenezca a la (G, X) -estructura de M . Se tiene $U_0 \cap U_{t_1} \neq \emptyset$ y $\phi_0 \psi_1^{-1}$ es un difeomorfismo local de X que es la restricción de un difeomorfismo analítico $g_1: X \rightarrow X$, $g_1 \in G$. Ahora considérese la carta local $\phi_{t_1} = g_1 \circ \psi_1: U_{t_1} \rightarrow X$, la cual evidentemente pertenece a la (G, X) -estructura de M y satisface $\phi_0 = \phi_{t_1}$ en $\text{Dom}(\phi_0) \cap \text{Dom}(\phi_{t_1})$. Por lo tanto, existe $\sigma_1 > 0$ tal que la familia:

$$\{(U_t, \phi_t); (U_t, \phi_t) = (U_0, \phi_0) \text{ si } t \in [0, t_1], (U_t, \phi_t) = (U_{t_1}, \phi_{t_1}) \text{ si } t \in [t_1, t_1 + \delta_1]\}$$

es una continuación analítica de (U_0, ϕ_0) , a lo largo del camino α , hasta el intervalo $[0, t_1 + \delta_1]$. Luego, el conjunto de puntos t en $[0, 1]$ donde existe una continuación analítica, a lo largo de α , en el intervalo $[0, t]$ es no vacío, abierto y cerrado y, por lo tanto coincide con $[0, 1]$.

Notamos que aún no hemos utilizado la analiticidad: el hecho anterior es válido sin esta hipótesis. El principio de monodromía, sin embargo, sí utiliza la hipótesis de analiticidad y su demostración es exactamente la misma que en el caso de funciones holomorfas: los caminos con los mismos

extremos y homotópicos, relativamente a estos extremos, determinan la misma continuación analítica en el extremo final de los caminos (ver por ejemplo [Ah1]).

6.5. COROLARIO. Sea M una (G, X) -variedad simplemente conexa y sea $\phi_0: U_0 \rightarrow X$ una carta local de la (G, X) -estructura de M . Sea $x \in U_0$ y sea $\phi: M \rightarrow X$ definida así:

$$\tilde{\phi}(m) = \phi_1(m),$$

donde $\{\phi_t: U_t \rightarrow X; t \in [0, 1]\}$ es una continuación analítica de (U_0, ϕ_0) , a lo largo de un camino $\alpha(t)$, tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = m$. Entonces $\tilde{\phi}$ es una submersión; en particular, $\tilde{\phi}$ aplica difeomórficamente una vecindad de cada punto sobre su imagen.

Sea ahora M una (G, X) -variedad arbitraria y describamos a su recubrimiento universal, \tilde{M} , como el espacio cociente $\Omega(x)/\sim$, donde $\Omega(x)$ es el conjunto de todos los caminos $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$, tales que $\alpha(0) = x$ y donde la relación de equivalencia " \sim " es: $\alpha \sim \beta \leftrightarrow \alpha(1) = \beta(1)$ y β es homotópico a α mediante una homotopía que fija a sus extremos.

Sea $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$, $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$, la proyección recubridora donde $[\alpha]$ denota a la clase de equivalencia de $\alpha \in \Omega(x)$. El grupo fundamental $\pi_1(M, x)$ actúa en \tilde{M} , como grupo de automorfismos del recubrimiento de la manera siguiente: si $[\gamma] \in \pi_1(M, x)$ está representado por el lazo γ , basado en x , entonces $T_\gamma: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es el automorfismo $T_{[\gamma]}([\alpha]) = \gamma * \alpha$, donde $\gamma * \alpha$ indica la yuxtaposición del camino γ seguido del camino α (la acción es una acción derecha).

Dotemos a \tilde{M} con la (G, X) -estructura inducida en ella por la proyección π . Con esta estructura π es un (G, X) -difeomorfismo local y los automorfismos $T_{[\gamma]}$ son (G, X) -difeomorfismos, para todo $[\gamma] \in \pi_1(M, x)$. Sea $\phi_0: U_0 \rightarrow X$ una carta local en M , tal que $x \in U_0$ y que pertenece a la (G, X) -estructura de M y donde U_0 es simplemente conexo. Sea $\tilde{x} \in \tilde{M}$ un punto tal que $\pi(\tilde{x}) = x$ y $\tilde{U}_0 \subseteq \tilde{M}$ la componente conexa de $\pi^{-1}(U_0)$ que contiene a \tilde{x} . Sea $\tilde{\phi}_0: \tilde{U}_0 \rightarrow X$ el levantamiento de ϕ_0 , es decir, la única función tal que $\tilde{\phi}_0 = \phi_0 \circ \pi$ y sea $D: \tilde{M} \rightarrow X$ la continuación analítica de $\tilde{\phi}_0$ obtenida de todos los caminos de \tilde{M} que empiezan en \tilde{x} , usando el corolario 6.5. Con estas notaciones tenemos:

6.6. DEFINICION. La aplicación $D: \tilde{M} \rightarrow X$ se llama la aplicación desarrolladora de X .

NOTA. Hay varias elecciones arbitrarias en la definición de "la" aplicación desarrolladora: la elección del punto base x , de la carta $\phi_0: U_0 \rightarrow X$ y del punto $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$. Si se fija al punto x y a la carta (U_0, ϕ_0) y si se elige otro punto \tilde{y} tal que $\pi(\tilde{y}) = x$, entonces si $D_1: \tilde{M} \rightarrow X$ es la aplicación desarrolladora obtenida con estos datos se tiene $D_1 = D \circ T_a$, donde T_a es el automorfismo del recubrimiento que lleva a \tilde{y} en \tilde{x} . Por el otro lado, si se fijan x y \tilde{x} y se cambia la carta (U_0, ϕ_0) por otra carta (U'_0, ϕ'_0) , entonces debe de existir $g \in G$ tal que $D_2 = g \circ D$, donde $D_2: \tilde{M} \rightarrow X$ es la aplicación desarrolladora que corresponde a la elección $(x, \tilde{x}, (U'_0, \phi'_0))$. Tal g debe existir puesto que en un pequeño abierto, $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$, D y D_2 son invertibles y se debe satisfacer que

$$D_2 \circ (D/\tilde{U})^{-1}$$

es la restricción de un único elemento de G (recordemos que G actúa de forma efectiva en X). Luego, una vez fijo $x \in M$, la aplicación desarrolladora D está bien definida salvo por composiciones de la forma $g \circ D \circ T_a$, donde $a \in \pi_1(M, x)$. En general, si $p: \hat{M} \rightarrow M$ es un recubrimiento universal de M , es decir, \hat{M} es simplemente conexa y p es una proyección recubridora y si dotamos a \hat{M} con la (G, X) -estructura inducida por p , entonces existe un (G, X) -difeomorfismo $h: \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{h} & \tilde{M} \\ & \searrow p & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Luego, "la" aplicación desarrolladora está bien definida salvo por composición con isomorfismos de recubrimiento y composición con elementos de G . Por lo tanto la elección del punto $x \in M$ es irrelevante, en este sentido, también. Sin embargo, para normalizar la notación fijemos de una vez por todas el punto x y la descripción de \tilde{M} , citada antes.

De la discusión anterior se sigue que para todo $a \in \pi_1(M, x)$ existe un único elemento $g_a \in G$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{T_a} & \tilde{M} \\ \downarrow D & & \downarrow D \\ X & \xrightarrow{g_a} & X \end{array} ,$$

luego, el siguiente diagrama también es conmutativo, para cualquier pareja $a, b; a, b \in \pi_1(M, x)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{M} & \xrightarrow{T_a} & \tilde{M} & \xrightarrow{T_b} & \tilde{M} \\
 \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D \\
 X & \xrightarrow{g_a} & X & \xrightarrow{g_b} & X
 \end{array}$$

De este diagrama se sigue que la correspondencia $a \rightarrow g_a$ es un homomorfismo del grupo $\pi_1(M, x)$ en G .

6.7. DEFINICION. El homomorfismo $H: \pi_1(M, x) \rightarrow G$ se llama la holonomía de M .

La ambigüedad en la definición del mapeo desarrollador se traduce en una ambigüedad en la definición del homomorfismo de holonomía, pero, si $p: \hat{M} \rightarrow M$ es un recubrimiento universal de M , entonces su homomorfismo de holonomía $H_1: \pi_1(M, y) \rightarrow G$ difiere de H solamente por una conjugación interna de G . Luego, podemos hablar de "la" holonomía de M como un homomorfismo

$$H: \pi_1(M) \rightarrow G,$$

del grupo abstracto $\pi_1(M)$ en G .

La holonomía, en general, no es suficiente para determinar a la (G, X) -estructura de M . En párrafos anteriores hemos utilizado frases como "f es un (G, X) -difeomorfismo local", "f es un (G, X) -difeomorfismo", etc. La definición precisa es la siguiente:

6.8. DEFINICION. Si M y N son dos (G, X) -variedades, entonces un difeomorfismo local $f: M \rightarrow N$ es un (G, X) -difeomorfismo local si en términos de cartas locales que pertenecen a las (G, X) -estructuras de M y N , f es la restricción de un elemento $g \in G$, $g: X \rightarrow X$. Si f es, además, biyectiva, entonces f se llama un (G, X) -difeomorfismo y su inversa f^{-1} es, automáticamente, un (G, X) -difeomorfismo.

6.9. DEFINICION. Dos (G, X) -variedades M y N son (G, X) -isomorfas si existe un (G, X) -difeomorfismo entre ellas.

Hay un caso importante en el que una (G, X) -variedad M queda completamente determinada por su holonomía, módulo (G, X) -isomorfismo: son las (G, X) -variedades completas:

6.10. DEFINICION. Una (G, X) -variedad M es completa si su aplicación desarrolladora $D: \tilde{M} \rightarrow X$ es un recubrimiento. En particular, si X es simplemente conexa entonces M es completa cuando $D: \tilde{M} \rightarrow X$ es un (G, X) -difeomorfismo.

Las (G, X) -variedades cerradas (= compactas y sin frontera) no son automáticamente completas pero esto depende exclusivamente de la naturaleza de G y su acción en X :

6.11. PROPOSICION. Sea X una variedad real-analítica conexa y sea G un grupo de difeomorfismos analíticos de X , tal que para todo $x \in X$, el estabilizador de x , $E(x) = \{g \in G; g(x) = x\}$ sea compacto y que actúa transiti-

vamente en X . Entonces toda (G, X) -variedad cerrada es completa.

DEMOSTRACION. Las hipótesis son exactamente las necesarias para garantizar la existencia de una métrica riemanniana en X que es invariante bajo la acción de G : G actúa isométricamente con respecto a una métrica completa de M . Para ver esto sea $x \in X$ arbitrario y $[\cdot, \cdot]_x$ un producto interno en $T_x X$. Sea $[\cdot, \cdot]_x$ el producto interno en $T_x X$ definido así:

$$[v, w]_x = \int_{E(x)} [g_*(v), g_*(w)] d\mu(g)$$

donde μ es la medida de Haar en el estabilizador de x (la cual existe puesto que $E(x)$ es compacto) y $g_*: T_x X \rightarrow T_x X$ es la diferencial de $g \in E(x)$, en el punto x . Obviamente $[\cdot, \cdot]_x$ es bilineal positivamente definido e invariante bajo la acción de las diferenciales, en el punto x , de los elementos de $E(x)$. Ahora, para cualquier $y \in X$ sea $g \in G$ tal que $g(y) = x$ y defínase $[\cdot, \cdot]_y$ un producto interno en $T_y X$ así:

$$[v, w]_y = [g_*(v), g_*(w)]$$

donde $g_*: T_y X \rightarrow T_x X$ es la diferencial de g en y . Si $g_1 \in G$ es tal que $g_1(y) = x$, entonces $g^{-1} \circ g_1 \in E(x)$, luego, $[\cdot, \cdot]_y$ no depende de g . La colección $\{[\cdot, \cdot]_y; y \in X\}$ define una métrica riemanniana invariante bajo la acción de G en X y es fácil ver que es diferenciable. Luego, existe una métrica riemanniana G -invariante en X . La distancia d inducida por esta métrica tiene que ser completa puesto que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X , entonces es acotada y si $B_\delta(x)$ es una δ -bola cerrada centrada en algún

punto de X , entonces existe una sucesión $\{g_n\}$ de G tal que $g_n(x) = x_n$. Como la sucesión es de Cauchy, existe N tal que $x_m \in g_N(B_\delta(x))$ para toda $m \geq N$, luego toda sucesión de Cauchy está contenida en un compacto (ya que $B_\delta(x)$ es compacta si δ es suficientemente pequeño) y por lo tanto converge. Ahora bien, si M es una (G, X) -variedad arbitraria, con un (G, X) -atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha); \phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow X\}$; defínase para cada $x \in M$ un producto interno, en $T_x M$, así:

$$[v, w]_x = [\phi_\alpha^*(v), \phi_\alpha^*(w)]_{\phi_\alpha(x)}$$

donde $x \in U_\alpha$ y ϕ_α^* denota a la diferencial de ϕ_α en el punto x . Ya que la métrica en X es G -invariante, se sigue que este producto interno no depende de ϕ_α (siempre y cuando su dominio contenga a x). Por lo tanto, toda (G, X) -variedad posee una métrica en la que sus cartas locales son isometrías locales. Dotemos a \tilde{M} con la métrica riemanniana inducida por π de la métrica anterior. Se sigue que la aplicación desarrolladora $D: \tilde{M} \rightarrow X$ es una isometría local. Si M es cerrada entonces su métrica es completa y, por lo tanto, la métrica inducida en M también es completa. Finalmente, usamos un hecho general: toda isometría local entre variedades completas y conexas es un recubrimiento. En efecto, si $f: M_1 \rightarrow M_2$ es una tal isometría local, entonces f goza de la propiedad de levantamiento (o elevación) de caminos: Si $\alpha: [0, 1] \rightarrow M_2$ es un camino en M_2 y $x \in f^{-1}(\alpha(0))$ entonces existe un camino $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow M_1$, que es levantamiento de α en el punto x , es decir, $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, y $\tilde{\alpha}(0) = x$. La demostración es muy sencilla, el conjunto: $\{t \in [0, 1]; \text{ existe un levantamiento de } \alpha \text{ en } [0, t]\}$ es no vacío y obviamente es abierto puesto que f es un homeomorfismo local. Por el otro lado, este

conjunto también es cerrado en $[0,1]$ puesto que f es una isometría local y M es completa con respecto a su métrica. Luego existe el levantamiento. Además, este levantamiento es único puesto que f es un homeomorfismo local, luego f es una proyección recubridora. (Q.E.D.)

NOTA. En la proposición 6.11 se requirió que G fuera compacto, esto quiere decir: G es compacto en la C^1 -topología de los difeomorfismos de X (para que el integrando de la integral, que define a la métrica de X , sea continuo).

6.12. Ejemplos.

Toda (G,X) -variedad cerrada es completa cuando (G,X) pertenece a la lista: $(O(n+1, \mathbb{R}), S^n)$, $(\text{Euc}(n), \mathbb{R}^n)$, $(\text{Iso}(\mathbb{H}^n), \mathbb{R}^n)$, (C^*, C) , (C^*, C^*) , (C, C) .

En los tres últimos miembros de la lista, C^* actúa en C mediante, $a \in C$, $T_a(z) = az$; C^* actúa en C^* mediante, $a \in C^*$, $T_a(z) = az$; $a \in C$ actúa en C mediante $b \in C$, $T_b(z) = z+b$.

Notamos que en la demostración de 6.11 solamente se utilizó el hecho de que la métrica de M fuera una métrica completa y por tal motivo se tiene la siguiente:

6.13. PROPOSICION. Si (G,X) es como en la proposición 6.11 y M es una (G,X) -variedad (no necesariamente compacta), con la métrica citada en dicha proposición, entonces M es completa como (G,X) -variedad si y solamente si M es completa como variedad riemanniana (es decir, como espacio métrico

con respecto a la distancia inducida).

Si se tiene un grupo de Lie G que actúa analíticamente en la variedad real-analítica X , entonces el grupo de Lie \tilde{G} que recubre universalmente a G también actúa en X y de hecho actúa en \tilde{X} , el recubrimiento universal de X . Por ejemplo, una (C^*, C^*) -variedad es automáticamente una (C, C) -variedad (basta tomar ramas de logaritmos de las cartas coordenadas de la (C^*, C^*) -estructura).

NOTA. En el contexto de la proposición 6.11, supóngase que X es simplemente conexa (por ejemplo en los tres primeros miembros en la lista de 6.12). Entonces si M es una (G, X) -variedad completa, $D: \tilde{M} \rightarrow X$ es un homeomorfismo, luego $H(\alpha) = DT_\alpha D^{-1}$, donde H es la holonomía y T_α el automorfismo de recubrimiento que corresponde a $\alpha \in \pi_1(M)$. Por lo tanto $H: \pi_1(M) \rightarrow G$ es un monomorfismo y se sigue que $M = \tilde{M}/\pi_1(M)$ es (G, X) -isomorfo a $X/H(\pi_1(M))$. De esto se sigue:

6.14. PROPOSICION. En el contexto de 6.11, si X es simplemente conexo, entonces toda (G, X) -variedad está determinada por su holonomía, es decir, M es (G, X) -isomorfa a la (G, X) -variedad cociente $X/H(\pi_1(M))$. En particular, $H(M) = H(\pi_1(M)) \subseteq G$ actúa propia, libre y discontinuamente en X .

Como aplicación tenemos un hecho que hemos citado varias veces:

6.15. COROLARIO. 1) Si M es una variedad elíptica cerrada, entonces M está

recubierta isométrica y universalmente por S^n y $M = S^n/\Gamma$ donde
 $\Gamma \subset O(n+1, \mathbb{R})$, es finito.

2) Si M es una variedad parabólica completa, entonces M está recubierta isométrica y universalmente por \mathbb{R}^n y $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, donde $\Gamma \subset \text{Euc}(n)$ es un grupo cristalográfico.

3) Si M es una variedad hiperbólica completa, entonces M está recubierta isométrica y universalmente por \mathbb{H}^n y $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ donde Γ es un subgrupo de $I(\mathbb{R}^n)$ que actúa propia, libre y discontinuamente en \mathbb{H}^n .

6.16. COROLARIO. El grupo fundamental de una variedad hiperbólica (o parabólica), completa es libre de torsión (ya que toda isometría de orden finito de \mathbb{R}^n ó \mathbb{H}^n tiene un punto fijo).

Si (G, X) es como en la proposición 6.11, entonces vimos que para que una (G, X) -variedad sea completa, como (G, X) -variedad es necesario y suficiente que esta variedad sea completa como variedad riemanniana (con respecto a la métrica construida en 6.11). El teorema de Hopf-Rinow implica que en una variedad geodésicamente completa, para todo $\epsilon > 0$, toda ϵ -bola, $B_\epsilon(x)$, cerrada, es compacta y recíprocamente si toda ϵ -bola cerrada es compacta, para todo $\epsilon > 0$, en una variedad riemanniana, entonces ésta es completa puesto que toda sucesión de Cauchy pertenece a una tal bola. Por el otro lado si una variedad M es completa entonces $M = \bigcup_{r>0} B_r(x)$ para todo punto x , y $B_{r+a}(x)$ contiene una vecindad de radio a de $B_r(x)$, si $a > 0$. Con estas observaciones se obtiene fácilmente la siguiente:

6.17. PROPOSICION. Si (G,X) satisface las hipótesis de 6.11 y M es una (G,X) -variedad, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) M es (G,X) -completo,
- 2) M es métricamente completo,
- 3) Existe $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ -bola cerrada es compacta,
- 4) Para toda $K > 0$, toda K -bola cerrada es compacta,
- 5) M se representa como una unión de compactos $M = \bigcup_{t>0} S_t$ tal que para toda $a > 0$, S_{t+a} contiene a la a -vecindad de S_t .

7. SUPERFICIES OBTENIDAS DE TRIANGULOS IDEALES

En los ejemplos 4.13, 2) y 4.13, 2') se obtuvieron dos superficies hiperbólicas a partir de triángulos hiperbólicos ideales. Estas construcciones se pueden generalizar:

Sean T_1, \dots, T_{2n} , triángulos hiperbólicos con sus vértices ideales incluidos. Por 2.73 sabemos que todos son isométricos y tienen área hiperbólica igual a π . Si se identifican por parejas a todos los lados de los triángulos, según cierto patrón lo que se obtiene es una superficie cerrada triangulada como un complejo K cuyos vértices son v_1, \dots, v_k . En general, K no necesariamente es orientable pero nosotros supondremos que tal es el caso. Si se suprimen los vértices se tiene una superficie orientable y abierta S (una superficie compacta "perforada") que corresponde a suprimir los vértices ideales de los triángulos e identificar los lados según el patrón combinatorio. Si además, se identifican las parejas de lados mediante isometrías hiperbólicas, entonces el teorema de ensambladura (4.10) implica que S tiene una estructura hiperbólica que en general no es completa y depende de las isometrías que identifican a las parejas de lados.

Para determinar si S es completa "cerca" de un vértice V (es claro lo que esto significa) se construye un invariante $d(V)$ de la siguiente manera:

En el vértice V la configuración, en una vecindad U de V en K , de los triángulos identificados, es como en la Figura 71.

En U , S tiene una foliación natural compuesta por partes de líneas geodésicas que "terminan" en V (Figura 72).

La foliación ortogonal, con respecto a la métrica hiperbólica está formada por segmentos de oriciclos (Figura 73).

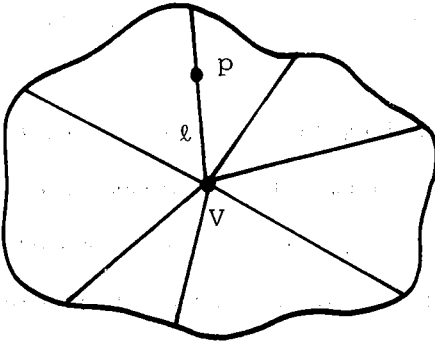


Fig. 71

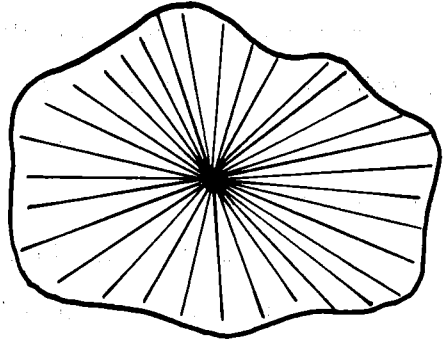


Fig. 72

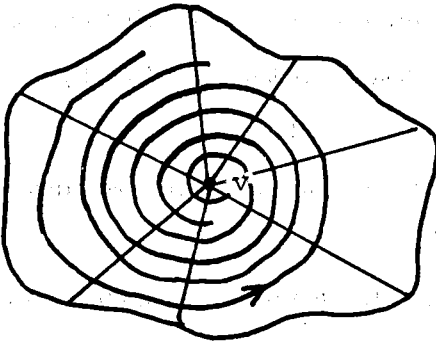
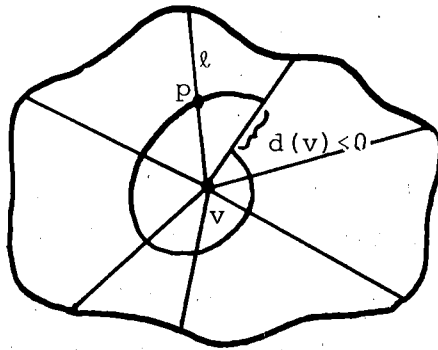


Fig. 73

Si se escoge un punto $p \in U$, que pertenece a una arista ℓ , y se orienta la curva de la foliación "oricflica" que pasa por p entonces esta curva reencuentra a ℓ en un punto p' , el invariante $d(v)$ es $\pm d(p, p')$ donde el signo se escoge negativo si la curva oricflica se orienta "contrariamente a las manecillas del reloj" y si p' queda entre p y V y positiva si orientando a la curva oricflica como antes p' queda afuera del segmento entre V y p (ver Figura 74).

Fig. 74



La definición intuitiva del invariante $d(v)$ puede precisarse, usando el modelo H , así:

Supóngase que T_1, \dots, T_k son los triángulos ideales que al identificarse tienen a V como vértice común en K . Renumerando los índices, si fuera necesario, se puede suponer que un lado de T_1 se identifica con un lado de T_2 , un lado de T_2 con uno de T_3, \dots , etc., hasta que, finalmente queda un lado libre de T_k que se identifica con un lado libre de T_1 . En este último paso (cuando $k = 1$ éste corresponde a identificar los lados de un triángulo) vemos que, "cerca" de V , S se obtiene al identificar (mediante una isometría) a dos rectas L_1 y L_2 , en un polígono P que tiene como lados a L_1 y L_2 y que queda comprendido entre L_1 y L_2 . Aquí, L_1 y L_2 son líneas

geodésicas representadas por rectas euclidianas perpendiculares al eje real. En la siguiente figura se ilustra el caso $k = 4$ (Figura 75):

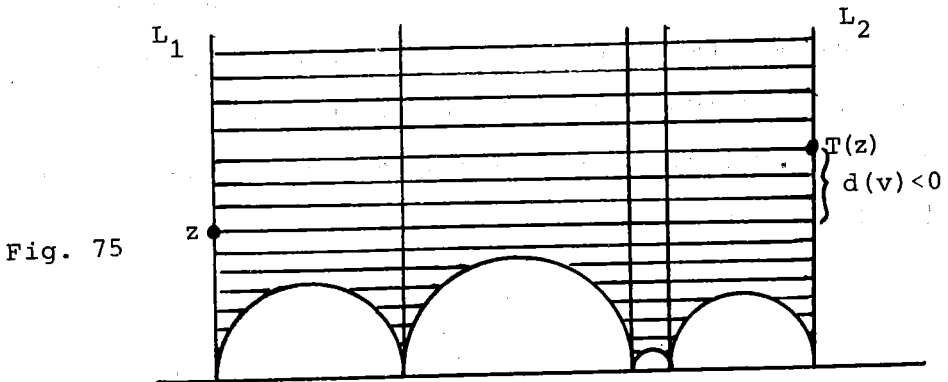


Fig. 75

Si $T: H \rightarrow H$ es una isometría que lleva a L_1 en L_2 , entonces T es una transformación de Moebius de la forma $T(z) = az+b$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$), luego, T permuta a los oriciclos "horizontales", $y = c > 0$. Por lo tanto, cuando se identifican L_1 y L_2 mediante T , esta familia de oriciclos se proyectan en la foliación oricíclica cerca de v . Si $a = 1$, entonces todos los oriciclos horizontales son dejados fijos, luego, las curvas de la foliación oricíclica son curvas cerradas y simples que circundan a v y esto implica que $d(v) = 0$. El recíproco también es cierto: si $d(v) = 0$ entonces $a = 1$. Si $a > 1$ esto quiere decir que $d(v) < 0$ y las curvas orientadas de la foliación oricíclica son espirales que se aproximan a v . Si $a < 1$, entonces las curvas son espirales que se alejan de v . Es evidente de la fórmula 2.51 que $d(v) = \log a$.

Si se orienta M , la definición de $d(v)$ depende solamente de S (como variedad hiperbólica) puesto que d sólo depende de la isometría T que identifica a L_1 con L_2 .

Si en el polígono P se toma un segmento euclidiano F que una a $z \in L_1$ con $T(z) \in L_2$, donde z tiene parte imaginaria suficientemente grande, y si R es la región cerrada de P de los puntos de P que quedan en, o "arriba" de, F entonces al identificar L_1 con L_2 , R corresponde a un cerrado \hat{R} de S limitado por una curva cerrada simple. Entonces, S es completo cerca de v y solo si \hat{R} es cerrado en S . Esto ocurre si y solo si $d(v) = 0$:

7.1. PROPOSICION. S es completa cerca de $v \leftrightarrow d(v) = 0$.

DEMOSTRACION. Sean P , L_1 , L_2 y F como antes. Sea $T(z) = az+b$ la isometría que identifica a L_1 con L_2 . Se tiene $d(v) = 0 \leftrightarrow a = 1$. Si $a \neq 1$, se puede suponer sin perder generalidad que $a > 1$ (en caso contrario considere T^{-1}). Supóngase $a > 1$ y sea A_0 la parte comprendida entre L_1 y L_2 de un oriciclo h que queda arriba de F . Sea $A_n = P \cap T^n(h)$; $n \geq 1$. Al identificar a L_1 con L_2 mediante T , la familia $\{A_n\}_{n \geq 0}$ forma una curva, γ , en S de longitud finita, en efecto:

$$\ell(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \ell(A_0) = \frac{a}{a-1} \ell(A_0),$$

puesto que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}$ converge. Luego, si x_n es el extremo de A_n que pertenece a L_1 , se sigue que la sucesión $\{x_n\}_0^{\infty}$ es de Cauchy. Por el otro lado, la sucesión no puede ser convergente en S puesto que la sucesión está espaciada equidistantemente en la geodésica h_1 que es una geodésica de longitud ilimitada en S . Por lo tanto, $d(v) \neq 0 \Rightarrow S$ es incompleta cerca de v . Por el otro lado, si $d(v) = 0$ entonces $a = 1$ y todos los oriciclos

horizontales son dejados fijos por T y, cerca de v , S es isométrica a una oribola $y \geq c > 0$, dividida por la acción de una translación $t(z) = z+b$ ($b \neq 0$) (donde c es suficientemente grande). La oribola es completa pues es cerrada en H , luego el cociente también lo es. (Q.E.D.)

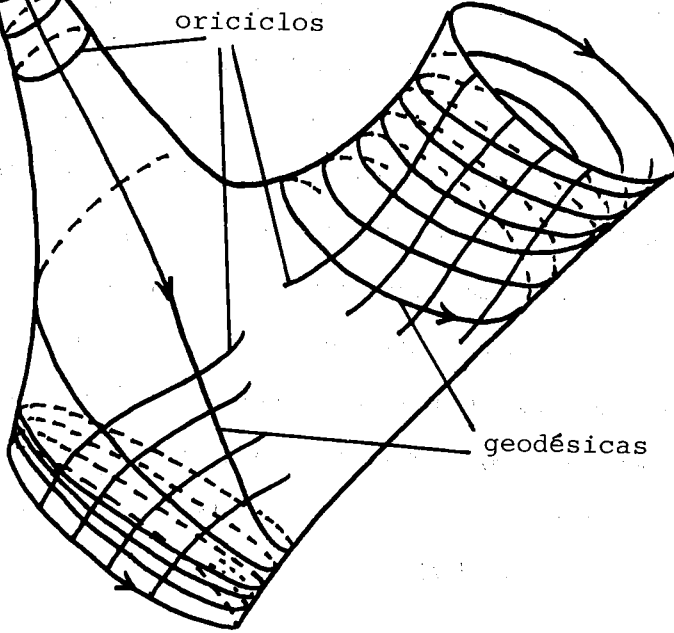
7.2. PROPOSICION: Una superficie S , orientable, obtenida al identificar isométricamente dos a dos todos los lados de una familia T_1, \dots, T_{2n} de triángulos hiperbólicos (suprimiendo los vértices) es completa $\leftrightarrow d(v_i) = 0$ para todos los vértices del complejo K citado antes.

Obviamente, la completación métrica de una variedad hiperbólica incompleta M , designada con el símbolo \bar{M} , no es en general variedad. Sin embargo, en muchas de ellas obtenidas a partir de simplejos ideales, ensamblando isométricamente sus caras, \bar{M} es variedad.

En el transcurso de la demostración de la proposición vimos que cuando una superficie S obtenida por el proceso descrito era incompleta cerca de un vértice V , entonces el hecho $d(v) \neq 0$ implicaba la existencia de una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, contenida en una curva oricflica que "espiraleaba" hacia V y distribuida de una manera equidistante a lo largo de esta curva. Con lo que se ha visto se puede demostrar fácilmente que toda sucesión de Cauchy no convergente cerca de V es equivalente a una de este tipo y también es fácil concluir que dos sucesiones de Cauchy, no convergentes cerca de V , a lo largo de una misma curva oricflica, que se acerca en espiral a V , son equivalentes. Por lo tanto, la completación métrica de S en el vértice V , se obtiene agregando un punto por cada curva oricflica.

$d(v_1) = 0$, $v_1 = \text{vértice "completo"}$

$d(v_2) > 0$, círculo geodésico en vértice incompleto



$d(v_2) < 0$

Fig. 76

Luego: \bar{S} se obtiene de S agregando un círculo por cada vértice incompleto (puesto que la familia de curvas oricíclicas en un vértice se parametriza con un círculo transverso a ellas). Además, \bar{S} es de hecho una variedad hiperbólica completa con frontera totalmente geodésica formada por los círculos agregados y con interior isométrico a S . La longitud en \bar{S} de un círculo que forme parte de la frontera de \bar{S} correspondiente a un vértice incompleto V , es precisamente $|d(v)|$. En \bar{S} las geodésicas que tendían hacia el vértice V se convierten en geodésicas que tienen como conjunto límite positivo a la geodésica circular que corresponde a V . Las curvas oricíclicas son las curvas ortogonales a estas geodésicas asintóticas. La siguiente figura puede guiar a la intuición del lector (Figura 76).

Nótese en la figura que el signo de $d(v)$ depende de la dirección en la que se acercan las geodésicas a la frontera con respecto a la orientación de la misma inducida por una orientación de S . Para verificar lo acertado respecto a la completación \bar{S} , cerca de un vértice incompleto, el lector podrá demostrar que una vecindad del círculo geodésico que corresponde al vértice es isométrico a V/f , donde $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una translación que fija una geodésica L , V es una semi-vecindad tubular de L y f desplaza a los puntos de L una distancia $d(v)$.

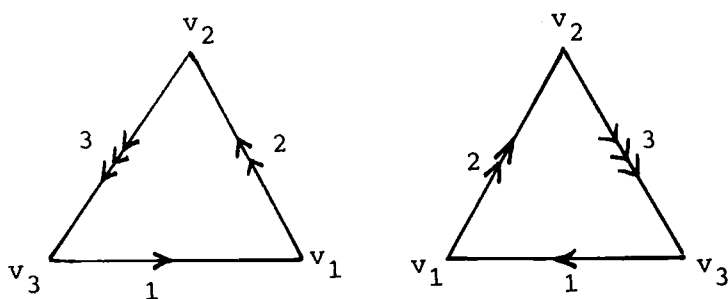
EJEMPLO. La esfera perforada en tres puntos, $S^2 - \{p_1, p_2, p_3\}$ se obtiene de dos triángulos hiperbólicos al suprimir sus vértices e identificar sus caras según el diagrama descrito en la Figura 77.

Si los lados marcados con el número 1 se identifican, entonces existe

una única manera de identificar a los lados marcados con los números 2 y 3 para que los invariantes $d(v_1)$ y $d(v_2)$ sean nulos. En general $d(v_2)$ no es nulo si la isometría que identifica los lados marcados con 1 no es elegida apropiadamente. Las isometrías que identifican a estos lados se parametrizan con \mathbb{R} y es fácil ver que se tiene una función biyectiva que asigna a la isometría que corresponde al parámetro t , el invariante $d(v_2)$, luego, existe una única estructura hiperbólica completa en $S^2 - \{p_1, p_2, p_3\}$, obtenida a partir de dos triángulos ideales identificando sus lados con el patrón indicado.

Como hemos visto anteriormente todas las superficies compactas perforadas de género g , $M_g - \{p_1, \dots, p_n\}$, se pueden obtener identificando lados de triángulos ideales (si $g = 0$ se tiene que tomar $n \geq 3$).

Fig. 77



8. VARIETADES HIPERBOLICAS DE DIMENSION TRES OBTENIDAS A PARTIR DE TETRAEDROS.

Si Δ_1 y Δ_2 se obtienen de dos triángulos ideales T_1, T_2 , suprimiendo sus vértices, entonces una isometría $F: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ automáticamente se extiende a un homeomorfismo $\hat{F}: T_1 \rightarrow T_2$ (con las topologías de T_1 y T_2 como subconjuntos del plano, por ejemplo). Por tal razón, a una tal \hat{F} la llamamos una "isometría" y la designamos con la misma letra F . Hemos visto que F queda completamente determinada por la correspondencia entre los vértices, puesto que todos los triángulos ideales son congruentes y la congruencia es única una vez establecida la correspondencia entre los vértices impropios.

En dimensión tres no es cierto que cualesquiera dos tetraedros ideales sean congruentes, sin embargo, los tetraedros hiperbólicos ideales se parametrizan con dos parámetros reales. Esta parametrización es posible porque los tetraedros hiperbólicos ideales tienen una simetría notable: los ángulos diédricos que forman las caras en aristas opuestas son iguales.

Thurston explica esta simetría así:

Ya que las aristas opuestas son antiparalelas, se sigue que tienen una perpendicular común única (la demostración es la misma que aquella de 2.40 puesto que siempre se puede suponer que una de las aristas es un diámetro en el modelo D^3). Una rotación de ángulo π en esta perpendicular común preserva los vértices del tetraedro, luego, preserva al tetraedro mismo. Obviamente esto implica que las tres perpendiculares comunes a, b, c , a las parejas de aristas opuestas, son concurrentes. Luego, las rotaciones A, B, C de ángulo π a lo largo de a, b y c respectivamente, junto con la identidad, es un grupo de simetrías del tetraedro isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

8.1. PROPOSICION. Si T es un tetraedro hiperbólico ideal de \mathbb{H}^3 (o de \mathbb{H}^n) entonces los ángulos diédricos de las caras en aristas opuestas coinciden. Si α , β y γ son dichos ángulos entonces $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ y, salvo congruencia, T está completamente determinado por α , β y γ (de hecho por dos de estos ángulos, puesto que satisfacen la relación previa). Por lo tanto, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de tetraedros hiperbólicos ideales y clases de equivalencia de triángulos euclidianos congruentes:

$T \leftrightarrow$ (triángulo de ángulos α , β , γ).

DEMOSTRACION. Si T es un tetraedro ideal en el modelo H^3 usando una isometría se puede suponer que uno de sus vértices, V , es el punto ∞ en $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Luego, las caras de T que contienen a V son planos perpendiculares a \mathbb{R}^2 y cortan a \mathbb{R}^2 en tres rectas euclidianas que determinan un triángulo euclidiano con ángulos α , β y γ . Evidentemente, α , β y γ son los ángulos hiperbólicos formados por las tres caras citadas (ver Figura 78).

Luego, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Si v_1 , v_2 y v_3 designan a los tres vértices restantes cuyas ternas de ángulos diédricos de las caras que contienen son (α, δ, θ) , (β, δ, ϕ) y (γ, θ, ϕ) , respectivamente, enviando uno por uno a estos vértices al punto ∞ (mediante isometrías) vemos que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

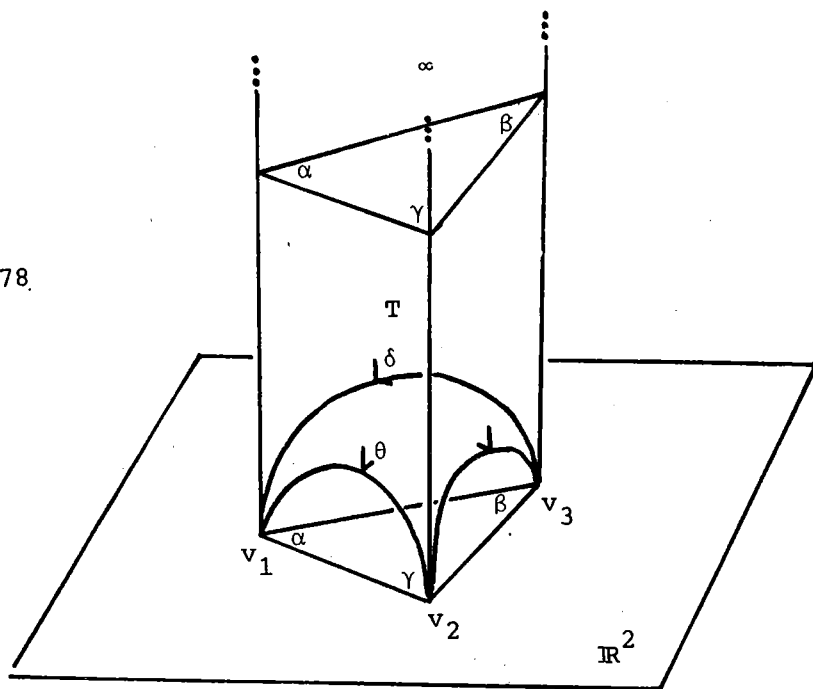
$$\alpha + \delta + \theta = \pi$$

$$\alpha + \delta + \phi = \pi$$

$$\alpha + \theta + \phi = \pi$$

y por lo tanto $\gamma = \delta$, $\beta = \theta$, $\alpha = \phi$.

Fig. 78.



Sea T^1 un tetraedro con la misma terna (α, β, γ) , de ángulos diédricos en aristas opuestas. Podemos suponer que T^1 tiene uno de sus vértices en ∞ y determina, por lo tanto, un triángulo en \mathbb{R}^2 similar con el que corresponde a T . Sea $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una similitud que manda un triángulo en el otro. Tenemos que $A(x, y) = rB(x, y)$ donde $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ y B es una transformación ortogonal. Luego, $F: H^3 \rightarrow H^3$, $F(x, y, z) = (A(x, y), rz)$ es una isometría de H^3 que lleva a T^1 en T . (Q.E.D.)

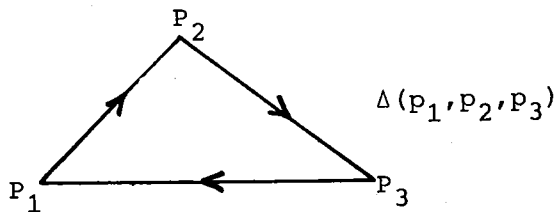
NOTA. La proposición anterior nos demuestra que un tetraedro T con vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 tiene la siguiente propiedad: Sean h_1, h_2, h_3 y h_4 oriesfe-

ras correspondientes a los vértices $v_1, v_2, v_3,$ y v_4 . Entonces $h_i \cap T$ son isométricos a triángulos euclidianos semejantes ($i = 1, 2, 3, 4$).

Todo triángulo euclidiano en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ es similar a un triángulo con vértices en los puntos $0, 1$ y z , con $\text{Im}(z) > 0$. La correspondencia, sin embargo, no es biunívoca ya que el triángulo con vértices $0, 1, 1-\bar{z}$ es similar al triángulo con vértices $0, 1, z$. La correspondencia resulta biunívoca para triángulos orientados: Existe una correspondencia biyectiva entre clases de similitud de triángulos euclidianos orientados (no degenerados) y puntos en el hemiplano superior $\text{Im}(z) > 0$.

Los triángulos se orientan eligiendo un orden cíclico de sus vértices y se dirá que el triángulo está positivamente orientado cuando este orden es en la dirección de las manecillas del reloj:

Fig. 79



Si $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ denota al triángulo positivamente orientado con vértices $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$, entonces a cada vértice se le puede asignar el siguiente invariante:

$$z(p_1) = \frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1} = z_1$$

$$z(p_2) = \frac{p_3 - p_2}{p_1 - p_2} = z_2$$

$$z(p_3) = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} = z_3$$

Se tiene:

$$(8.2) \quad \begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= -1 \\ 1 - z_1 + z_1 z_2 &= 0. \end{aligned}$$

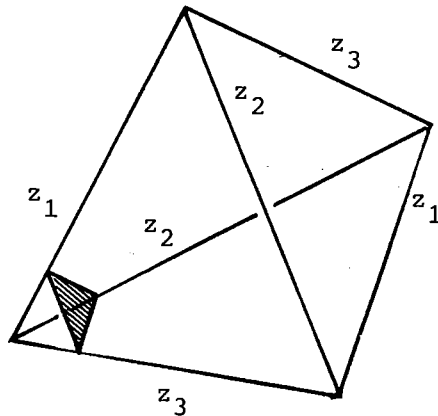
Luego uno de los números z_1, z_2, z_3 determina a los otros dos. Ya que el triángulo es positivamente orientado tenemos $\text{Im}(z_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$. Por el otro lado, se tiene:

$|z(p_i)|$ = razón de lados adyacentes en p_i

$\text{Arg } z(p_i)$ = ángulo en el vértice p_i .

Por lo tanto, $\{z_1, z_2, z_3\}$ sólo depende de la clase de similitud del triángulo y (z_1, z_2, z_3) sólo depende de la clase de similitud orientada del triángulo. Podemos, así, etiquetar a todo tetraedro hiperbólico ideal, poniendo etiquetas (de H^2) iguales en aristas opuestas, sujetas a la relación (8.2), como en la siguiente figura:

Fig. 80



Si $z(e)$ es la etiqueta asignada a la arista e del tetraedro hiperbólico entonces $\arg(e)$ es el ángulo diédrico en la arista e y $|z(e)|$ es razón entre los lados de un triángulo euclidiano obtenido al cortar a T por una oriesfera que corresponda a uno de los vértices de e . La manera de etiquetar a un tetraedro es inambigua y única.

8.3. Condiciones necesarias para obtener variedades hiperbólicas a partir de tetraedros.

Sean T_1, \dots, T_n tetraedros hiperbólicos ideales y sea A el conjunto de sus caras. Supóngase que A se expresa como una unión ajena

$$A = \{C_1, \dots, C_n\} \cup \{B_1, \dots, B_n\}.$$

Sean $F_i: C_i \rightarrow B_i$ isometrías y sea K el complejo celular que se obtiene al identificar las caras de los tetraedros según estas isometrías. El complejo K tiene la descomposición celular natural que proviene de los vértices, aristas, caras y tetraedros y podemos hablar del k -esqueleto de K formando por los elementos lineales de dimensión $\leq k$, $k = 0, \dots, 4$.

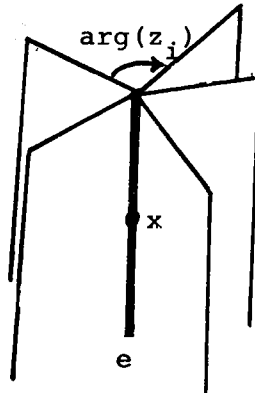
En general, K no es una variedad (esto ocurre cuando y sólo cuando K tiene característica de Euler-Poincaré nula), pero si se suprime el 0 -esqueleto, K_0 , (los vértices) entonces $K - K_0$ es una variedad topológica abierta. Aunque las caras de $\{T_i\}$ fueron identificadas mediante isometrías esto no produce de manera inmediata una estructura hiperbólica en $K - K_0$: hay problema en las aristas. Sin embargo, en virtud del teorema de ensambladura $K - K_1$ (donde K_1 es el 1 -esqueleto) sí tiene una estructura hiperbólica (la cual no es completa).

Sea $M = K - K_0$ la variedad que se obtiene al suprimir los vértices de K . Sean e_1, \dots, e_n todas las aristas de los diversos triángulos que se identifican a una sola arista e de K (posiblemente una o varias aristas pertenezcan a un mismo tetraedro). Sean $z_1 = z_1(e_1), \dots, z_n(e_n)$ los números complejos asignados a cada arista. Ya que $\text{Im } z_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) se puede tomar la rama principal de $\text{Arg}(z_i)$ ($0 < \text{Arg}(z_i) < \pi$). En una vecindad de un punto x de la arista e , las caras de los tetraedros que se ensamblan en e tienen ángulos diédricos $\arg(z_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Evidentemente, si M tiene una estructura hiperbólica tal que las inclusiones naturales

$$j_i: T_i - (\text{vértices de } T_i) \rightarrow M; \quad i = 1, \dots, n$$

sean isometrías entonces la suma de los ángulos diédricos en la arista e debe ser 2π :

Fig. 81



Luego, una condición necesaria que se debe de satisfacer para que M posea una estructura hiperbólica es que para toda arista e se tenga:

$$(8.4) \quad \sum_{i=1}^n \arg z_i(e_i) = 2\pi.$$

La condición (8.4) no es suficiente para garantizar que M tenga una estructura hiperbólica alrededor de la arista e . Para entender bien el otro tipo de condiciones que se deben cumplir es necesario introducir el siguiente concepto:

8.5. DEFINICION. Si $v \in K$ es un vértice, entonces la aureola de v , escrita con el símbolo $L(v)$, es el conjunto de rayos geodésicos que emanan de v . Más precisamente, si T es un tetraedro ideal y w es un vértice entonces todas las geodésicas dentro de T que tienen a w como punto impropio es la aureola de w en T , designada con el símbolo $L(w;T)$. Si w_1, \dots, w_n son los vértices que se colapsan en v , al hacer la identificación y si w_i es vértice ideal de uno de los tetraedros que designamos con el símbolo $T(w_i)$, entonces la colección $L(w_i;T(w_i))$ determina a $L(v)$.

Si v es un vértice de un tetraedro ideal T entonces $L(v,T)$ está parametrizado por un triángulo $\Delta(v,T)$, euclidiano, como ya habíamos visto, que es la intersección con T de una esfera correspondiente al vértice v . Se tiene, por lo tanto, que $L(v)$ es de manera natural una superficie compacta y sin frontera con una triangulación natural: $L(v)$ se parametriza por una colección de triángulos, (v_i, T_i) , euclidianos al identificar a todos los lados de estos por parejas.

Si M tiene una estructura hiperbólica y v es un vértice de K , entonces

la aplicación desarrolladora $D: \tilde{M} \rightarrow H^3$ aplica a todos los rayos geodésicos que emanan de v (es decir $L(v)$) en una familia F de rectas hiperbólicas paralelas de H^3 . Sin perder generalidad (componiendo a D con una isometría de H^3), se puede suponer que esta familia consiste de rayos euclidianos perpendiculares a \mathbb{R}^2 . Si $H: \pi_1(M) \rightarrow I(H^3)$ es la holonomía de la estructura hiperbólica de M , entonces $H(\pi_1(M))$ tiene un subgrupo $G(v)$ que corresponde a la estructura hiperbólica inducida "cerca de v ": el subgrupo de los elementos de $H(\pi_1(M))$ que permutan los elementos de F , luego, $G(v)$ consiste de isometrías de $H^3 = \{(z,t); z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ de la forma:

$$F(z,t) = (\lambda z + b, |\lambda|t), b \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}^*, t > 0.$$

Sea $\bar{F}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la similitud $\bar{F}(z) = \lambda z + b$.

El recubrimiento universal $\tilde{L}(v)$ de la aureola de un vértice v puede parametrizarse con la familia de geodésicas en \tilde{M} que son levantamientos de rayos geodésicos en M que emanan de v . Por lo tanto, se tiene la aplicación $f: \tilde{L}(v) \rightarrow \mathbb{C}$ descrita como sigue:

$$f(\ell) = z, \text{ donde } z \text{ es el extremo en } \mathbb{C}$$

de la geodésica vertical $D(\ell) = \{(z,t); t > 0\}$. Si $F \in G(v)$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}(v) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \tilde{L}(v) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{C} \end{array}$$

donde $\alpha \in \pi_1(M)$ actúa en \tilde{M} como automorfismo del recubrimiento universal de M y $\bar{\alpha}$ es la acción inducida en las geodésicas de \tilde{M} que representan a $L(v)$.

Ya que para cada $F \in G(v)$, $\bar{F}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una similitud, se sigue que f es el map desarrollador de una estructura de similitud de $L(v)$. Luego, se tiene que una condición necesaria para que M tenga una estructura hiperbólica es la de que para todo vértice $v \in K$, $L(v)$ debe poseer una estructura de similitud. La aureola, $L(v)$, de un vértice tiene su triangulación natural, discutida antes, cuyos vértices corresponden a las aristas de K . Esta triangulación τ , se levanta a una triangulación, $\tilde{\tau}$, de $\widetilde{L(v)}$. Si w es un vértice de la triangulación τ que corresponde a la arista e de K y si e_1, \dots, e_n son las aristas de los tetraedros T_i ($i=1, \dots, n$) que se identifican con e , entonces para que M posea una estructura hiperbólica "cerca de e " es necesario que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$(8.6) \quad z(e_1) \cdot z(e_2) \cdot \dots \cdot z(e_n) = 1$$

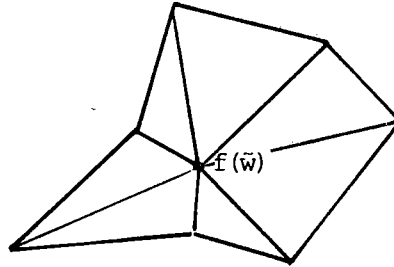
donde $z(e_1), \dots, z(e_n)$ son las etiquetas de dichas aristas.

La igualdad (8.6) se sigue del hecho siguiente: Si $\tilde{w} \in \widetilde{L(v)}$ es un vértice que cubre a w entonces todos los triángulos de $\tilde{\tau}$ que tienen a w como vértice se aplican bajo el map desarrollador f en una "estrella" de triángulos euclidianos como en la Figura 82.

Luego, el producto de las razones de las aristas adyacentes, en $f(\tilde{w})$, de los triángulos debe de ser 1 y la suma de sus ángulos, en $f(\tilde{w})$, debe de ser 2π y esto es equivalente a las dos ecuaciones:

$$(8.7) \quad \begin{aligned} z(e_1) z(e_2) \dots z(e_n) &= 1 \\ \arg(e_1) + \dots + \arg(e_n) &= 0. \end{aligned}$$

Fig. 82



Por el otro lado, $K-K_1$ tiene una estructura hiperbólica (por el teorema de ensambladura) y para que M tenga estructura hiperbólica es necesario solamente, extender esta estructura a las aristas. Si $D_1: K-K_1 \rightarrow H^3$ es el map desarrollador de la estructura hiperbólica de $M_1 := K-K_1$ y si e es una arista de K y $\alpha \in \pi_1(M_1)$ es una curva pequeña que circunde a la arista, obviamente se debe satisfacer que $H(\alpha) = 0$ (donde H es la holonomía de M_1) para poder extender la estructura hiperbólica de M_1 a la arista e . Esto implica que las ecuaciones (8.7) deben ser satisfechas. Tenemos, finalmente, la siguiente:

8.8. PROPOSICION. Si M y K son como antes, entonces una condición necesaria y suficiente para que M posea una estructura hiperbólica es que para todo vértice v de K , su aureola $L(v)$ posea una estructura de similitud y por lo tanto $L(v)$ tiene que ser un toro T^2 . Esto último ocurre si y solamente si las ecuaciones de compatibilidad (8.7) son satisfechas.

Esta proposición de Thurston nos dice, además, que no es suficiente el patrón combinatorio (el cual es único una vez elegidos los tetraedros) con el que identificamos las caras: se requiere usar tetraedros isométricos a ciertos tetraedros específicos.

Si M y K son como antes y si M admite una estructura hiperbólica cabe preguntarse: ¿cuándo es M completa? La completez de M debe ser verificada "cerca" de los vértices de K . Si v es un vértice de K su aureola $L(v)$ es un toro T^2 cuyo grupo fundamental es $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: el grupo abeliano libre en dos generadores. Sea $G(v) = H(i_{\#}(\pi_1(L(v))))$ la imagen bajo la holonomía, donde $i: L(v) \rightarrow M$ es la inclusión evidente. Este grupo coincide con el grupo $G(v)$ citado anteriormente y esencialmente determina a la estructura hiperbólica en una "vencindad de v ". Como hemos visto, $G(v)$ consiste de transformaciones $F: H^3 \rightarrow H^3$; $H^3 = \{(z, t); z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ del tipo:

$$F(z, t) = (az + b, |a|t); a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

Sea $\bar{F}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la similitud asociada:

$$\bar{F}(z) = az + b.$$

Se tiene que $G(v)$ actúa mediante similitudes en \mathbb{C} y ya que $G(v)$ es abeliano se sigue que si $F \in G(v)$ y \bar{F} deja fijo a un punto $w \in \mathbb{C}$ entonces todo $K \in G(v)$ tiene la propiedad $K(w) = w$. Por lo tanto, $G(v)$ actúa exclusivamente por translaciones en \mathbb{C} o bien por similitudes puras. Supongamos que $G(v)$ actúa por translaciones: $F \in G(v) \Rightarrow \bar{F}(z) = z + b_F$. En este caso todo elemento de $G(v)$ fija a cada oriesfera horizontal $t = \text{constante}$. Por lo tanto $L(v)$ tiene una estructura euclidiana (es un toro plano). Además, si

esto ocurre M es completa cerca de v , puesto que es muy fácil ver que M es isométrica cerca de v a $O/G(v)$, el espacio cociente de una oribola cerrada $t \geq c > 0$, bajo la acción de $G(v)$. Ahora supóngase que $G(v)$ actúa en C mediante similitudes puras: $F \in G(v) \Rightarrow \bar{F}(z) = a_F z$, $a_F \in C^*$ (trasladando el punto fijo común al origen). Entonces, la recta hiperbólica $L = \{(0, t); 0 \in C, t > 0\}$ es dejada fija por todos los elementos de $G(v)$ y por lo tanto, también su δ -vecindad tubular ($\delta > 0$), $V_\delta(L)$, el lector podrá verificar muy fácilmente que $\pi_1(L(v))$ se inyecta en la holonomía y que debe de existir un elemento $F_0 \in G(v)$ tal que $\bar{F}_0(z) = az$ con $|a| \neq 1$. En la proposición 6.2 está implícito el hecho siguiente: una (C^*, C) -estructura en un toro T^2 tiene como imagen de su map desarrollador a C^* , luego, tal estructura puede ser considerada como una (C^*, C^*) -estructura. De este hecho se sigue que $V_\delta(L)$ - L tiene recubrimiento universal isométrico al recubrimiento universal de una "vecindad de v " en M , sin embargo, $V_\delta(L)$ - L no es completo y por lo tanto M no puede ser completo cerca de v . Tenemos así:

8.9. PROPOSICION. Si M y K son como antes, entonces una condición necesaria y suficiente para que M sea una variedad hiperbólica completa es la de que, para todo vértice v de K , $L(v)$ tenga una estructura euclidiana.

9. ESTUDIO DE LA COMPLETACION METRICA DE M EN LA VECINDAD DE UN VERTICE

En esta sección conservaremos a toda la notación de la sección anterior. Supóngase que $v \in K$ es un vértice incompleto: $L(v)$ no tiene estructura euclidiana y tiene solamente una estructura de similitud pura.

Existe una vecindad $U(v)$ de v en K tal que $V(v) := U(v) - \{v\}$ es homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$ y su adherencia $\bar{V}(v)$, en M , es homeomorfa a $T^2 \times [0, \infty)$.

$V(v)$ puede reconstruirse del map desarrollador de la estructura de similitud de $L(v)$ así:

Sea $f: \widetilde{L(v)} \rightarrow C^*$ el map desarrollador y $H(\pi_1(L(v))) \rightarrow C$ su holonomía. Sean $\alpha, \beta \in \pi_1(L(v))$ una base del grupo abeliano libre $\pi_1(L(v)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Se tiene $H(\alpha): C^* \rightarrow C^*$ y $H(\beta): C^* \rightarrow C^*$ son las dos similitudes $H_\alpha(z) = az$; $H_\beta(z) = bz$; $z \in C^*, a, b \in C^*$.

Sea L la recta hiperbólica $\{(0, t); 0 \in C, t > 0\}$ y C el subconjunto de H^3 definido así:

$$C = \overline{V_\delta(L)} - L = \{p = (z, t) \in H^3; 0 < d(p, L) \leq \delta\}.$$

Las isometrías hiperbólicas,

$$\hat{H}(\alpha): H^3 \rightarrow H^3$$

$$\hat{H}(\beta): H^3 \rightarrow H^3$$

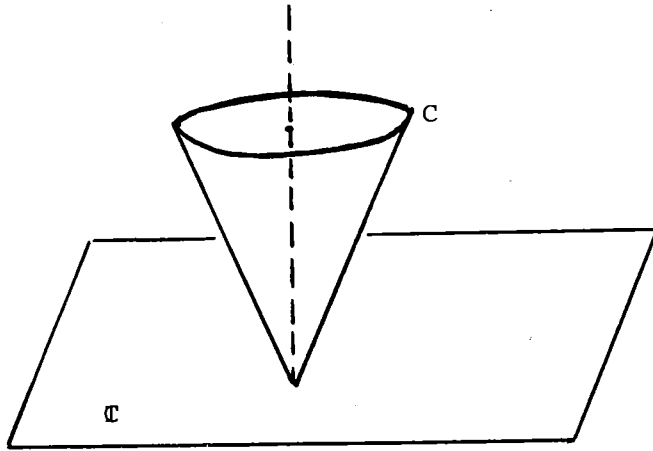
definidas mediante:

$$\hat{H}(\alpha)(x, t) = (ax, |a|t)$$

$$\hat{H}(\beta)(z, t) = (bz, |b|t),$$

dejan fijo a $C =$ cono cerrado al que se le suprime su eje (Figura 83):

Fig. 83



Sea \tilde{C} el recubrimiento universal de C y $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ la proyección recubridora. Dotemos a \tilde{C} con la métrica hiperbólica inducida por π . Sea \bar{C} la completación métrica de \tilde{C} . Ya que π es uniformemente continua, se sigue que π se extiende a una función $\bar{\pi}$, entre completaciones:

$$\bar{\pi}: \bar{C} \rightarrow \bar{C},$$

donde \bar{C} denota a la completación métrica de C . Obviamente $\bar{C} = \overline{V_\delta(L)} = \delta$ -vecindad tubular cerrada de L . Se tiene que $H(\alpha)$ y $H(\beta)$ se pueden levantar a \tilde{C} (de una manera no única, pero no es importante).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\hat{H}(\alpha)} & \tilde{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ C & \xrightarrow{H(\alpha)} & C \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\hat{H}(\beta)} & \tilde{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ C & \xrightarrow{H(\beta)} & C \end{array}$$

$\hat{H}(\alpha)$ y $\hat{H}(\beta)$ actúan propia, libre y discontinuamente en \tilde{C} (dejo al lector verificar esto) y además, son isometrías. Si \tilde{G} es el grupo generado por $\hat{H}(\alpha)$ y $\hat{H}(\beta)$, entonces \tilde{C}/\tilde{G} es isométrico a $V(v)$.

Luego, para entender cómo se ve topológicamente la completación, $\bar{V}(v)$, de $V(v)$ hay que hacer lo siguiente: entender la naturaleza de \tilde{C} y de $\tilde{C}/\tilde{G} = \bar{V}(v)$.

El cono perforado C tiene una foliación natural, F , cuyas hojas son discos euclidianos perforados en su centro, obtenidas al intersecar las oriesferas $t = c > 0$, con C (ver Figura 84). La foliación F la llamaremos la foliación oriesférica de C .

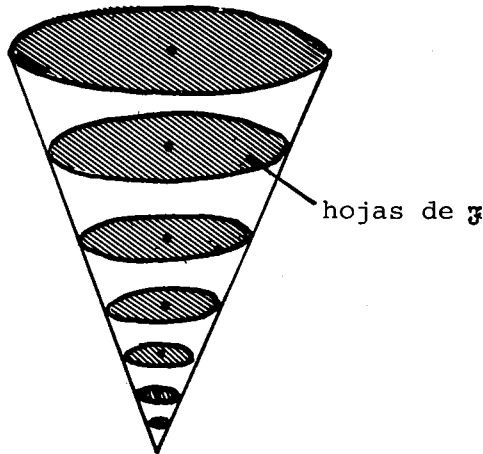


Fig. 84

La foliación F se levanta a una foliación \tilde{F} en \tilde{C} cuyas hojas son invariantes bajo $\hat{H}(\alpha)$ y $\hat{H}(\beta)$ (puesto que las hojas de F son invariantes bajo $H(\alpha)$ y $H(\beta)$). Evidentemente, toda sucesión de Cauchy de C , no convergente en C , es convergente en H^3 a un punto de L . Luego, toda tal sucesión es

equivalente a una sucesión de C cuyos elementos están en una hoja de F . Es fácil verificar que lo mismo ocurre en \tilde{C} : cualquier sucesión de Cauchy no convergente en \tilde{C} es equivalente a una sucesión a lo largo de una hoja de \tilde{F} . La foliación \tilde{F} es muy sencilla: ya que cada hoja de F inyecta a su grupo fundamental ($\approx \mathbb{Z}$) en el grupo fundamental de C , ($\approx \mathbb{Z}$), tenemos que \tilde{C} es difeomorfa a un hermespacio cerrado de \mathbb{R}^3 , por ejemplo a $N = \{(x,y,z); z \geq 0\}$, y la foliación \tilde{F} corresponde, bajo un difeomorfismo apropiado, a la foliación de N por hemiplanos cerrados $x = \text{constante}$, $z \geq 0$. Podemos hacer corresponder a cada hoja de la foliación \tilde{F} un único punto de la recta L y es fácil ver que la siguiente proposición es cierta:

9.1. PROPOSICION. La completación \tilde{C} se obtiene agregando un punto por cada hoja de la foliación oriesférica \tilde{F} . Dos puntos $p_1, p_2 \in \tilde{C} - C$ que correspondan a las oriesferas $\{(z,a); z \in C, a > 0\}$ y $\{(z,b); z \in C, b > 0\}$ están a distancia $d(p_1, p_2) = |\log a - \log b|$.

Ya que \tilde{G} permuta a las hojas de \tilde{F} , se sigue que \tilde{C}/\tilde{G} (que es isométrico con $V(v)$) tiene una foliación, $\tilde{F}(\tilde{G})$ a la que llamaremos la foliación oriesférica alrededor del vértice v .

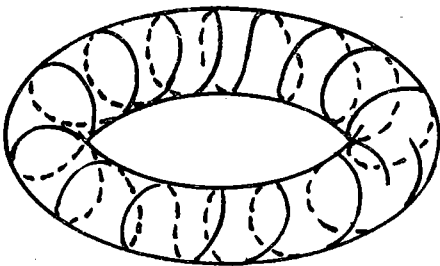
La frontera de \tilde{C} es isométrica con \mathbb{R}^2 , puesto que ∂C se obtiene al levantar la frontera de la δ -vecindad de L y el grupo $I(H^3)$ actúa transitivamente en esta frontera (luego tiene curvatura constante) y cubre isométricamente a un toro. \tilde{F} , induce una foliación, $\tilde{\phi}$, en $\partial\tilde{C}$, cuyas hojas son la intersección de las hojas de \tilde{F} con $\partial\tilde{C}$. Se sigue inmediatamente que existe una isometría $\phi: \partial\tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva a las hojas de $\tilde{\phi}$ en una familia

de rectas euclidianas de \mathbb{R}^2 (dejo al lector verificar que las hojas de $\tilde{\phi}$ son líneas geodésicas de $\partial\tilde{C}$, con su métrica inducida). Por el otro lado \tilde{G} actúa en $\partial\tilde{C}$ propia, libre y discontinuamente y por lo tanto $\partial\tilde{C}/\tilde{G}$ es isométrica con un toro plano (puesto que $\tilde{G} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). La foliación $\tilde{\phi}$ es G -invariante, luego, induce una foliación ϕ en $\partial\tilde{C}/\tilde{G}$.

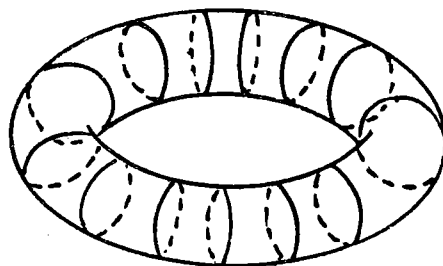
La pareja $(\partial\tilde{C}/\tilde{G}, \phi)$ completamente determina la naturaleza de la completación, $\overline{V(v)}$, cerca del vértice v y es de naturaleza muy simple:

9.2. PROPOSICION. Existe una isometría $\psi: \partial\tilde{C}/\tilde{G} \rightarrow T^2$ donde $T^2 = \mathbb{R}^2/L$ es el toro plano obtenido al tomar el cociente de \mathbb{R}^2 bajo la acción de un grupo L generado por dos translaciones linealmente independientes de \mathbb{R}^2 . Además, se puede escoger ψ de tal manera que lleve a las hojas de ϕ en una foliación lineal de \mathbb{R}^2 (una foliación inducida por rectas paralelas de \mathbb{R}^2).

Una foliación lineal de un toro plano tiene la propiedad siguiente: todas las hojas son densas o todas las hojas son compactas (son círculos paralelos):



hojas densas



hojas compactas

Fig. 85

Luego, la foliación $\tilde{F}(\tilde{G})$ es una foliación con hojas densas y difeomorfas a planos o bien una foliación por hojas cilíndricas. La completación

$\bar{V}(v)$ es la compactificación por un punto si todas las hojas son densas (todas las sucesiones de Cauchy no convergentes son equivalentes, por la densidad de las hojas). Si todas las hojas son cilíndricas entonces $\bar{V}(v)$ se obtiene de $V(v)$ agregando un punto por cada hoja compacta de Φ . En este último caso se le agrega un círculo a $V(v)$ para obtener la completación, puesto que las hojas cilíndricas son cortadas por un círculo transversal que corta a todas ellas en exactamente un punto.

10. EL COMPLEMENTO DEL NUDO "CON FORMA DE OCHO" Y DEL ENLACE DE WHITEHEAD

El nudo "con forma de ocho" lo habíamos designado con el símbolo [8]. Si identificamos a S^3 con $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ tenemos los siguientes dibujos de nudos isotópicos a [8].

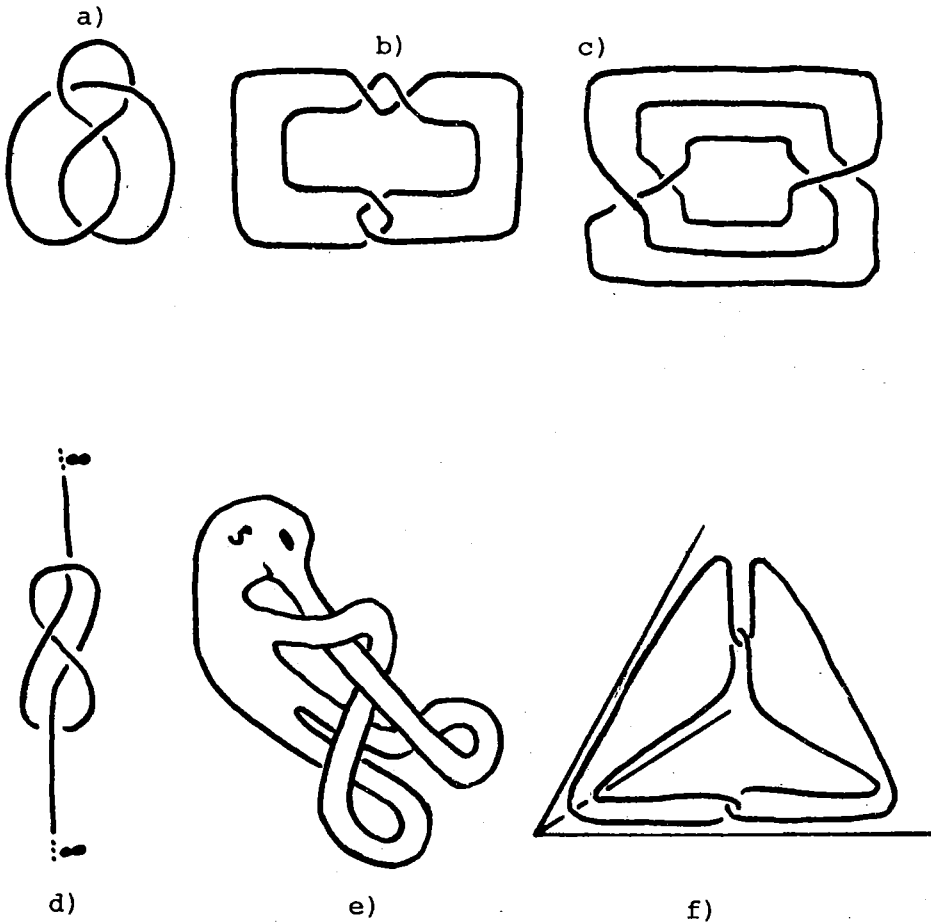


Fig. 86

En la figura 86(f) vemos que $[8]$ se puede colocar cerca de las aristas de un tetraedro y que $[8]$ es "frontera" de una configuración celular que separa a \mathbb{R}^3 en dos componentes abiertas homeomorfas a discos de dimensión 3:

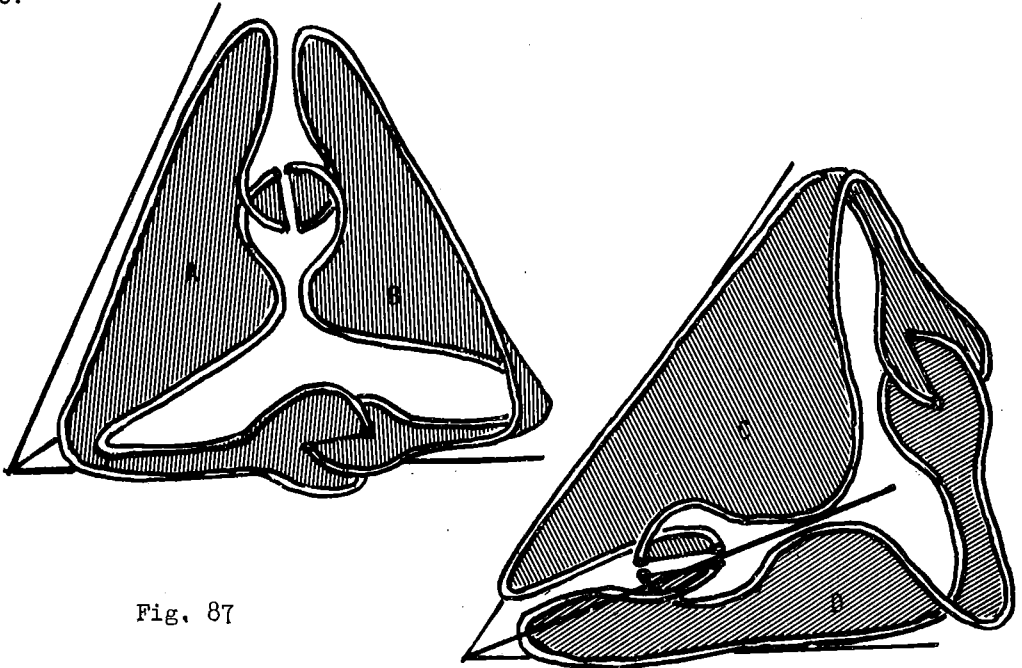


Fig. 87

El lector puede usar estos dibujos para verificar que la identificación de dos tetraedros (suprimiendo sus vértices) es homeomorfo a $S^3 - [8]$, si sus caras se identifican según el patrón de la Figura 58. Análogamente, el enlace de Whitehead es "frontera" de una configuración celular cuyo complemento es una celda abierta de dimensión tres y el complemento del enlace de Whitehead se obtiene de un octaedro identificando sus caras (y suprimiendo sus vértices) según el patrón indicado.

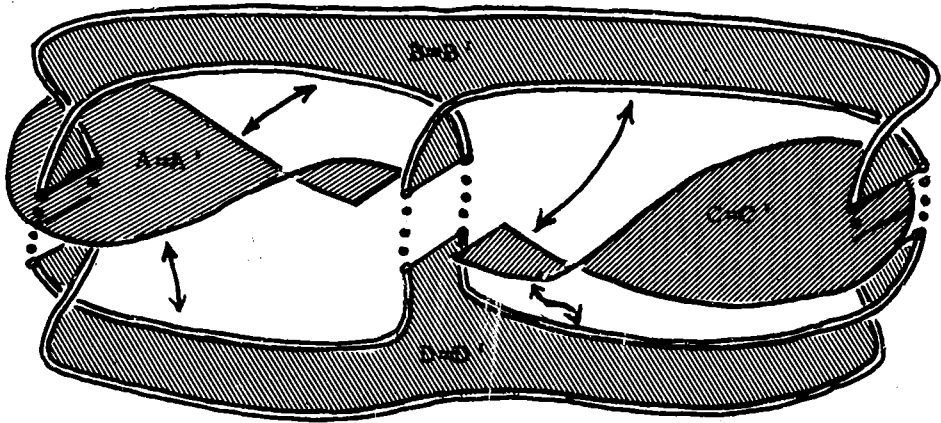
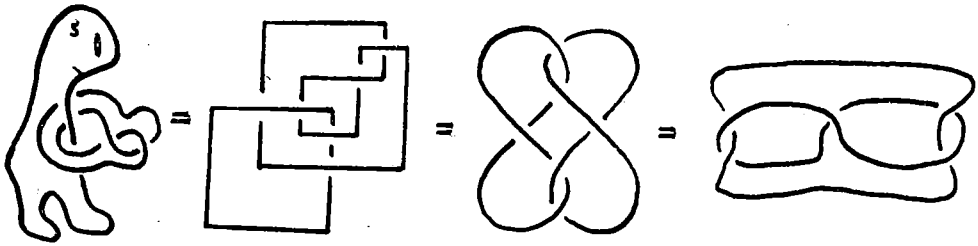


Fig. 88

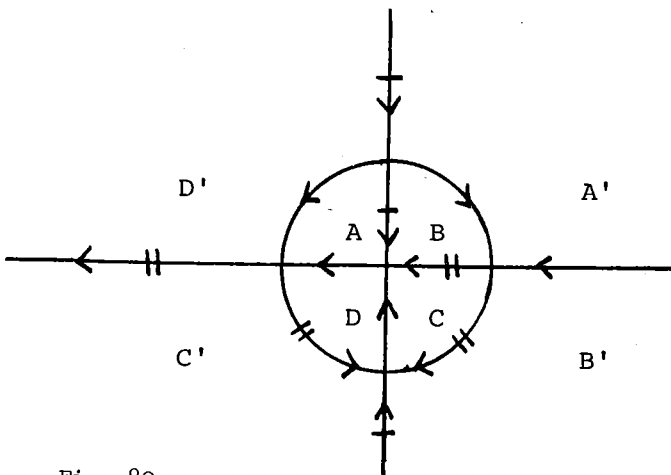


Fig. 89

BIBLIOGRAFIA

- [Ah] L. Ahlfors, "Complex Analysis", New York, McGraw Hill (Third Ed.).
- [B] E. Beltrami, "Ricerche di Analisi Applicata alla Geometria", G. Mat. Battaglini 2 (1864).
- [G] K.F. Gauss, "Astronomische Abhandlungen", Vol. 3 (H.C. Schumacher ed) Altona 1825.
- [Kli] W. Klingenberg, "A course in differential geometry", New York, Springer Verlag (G.T.M.) 1978.
- [Kor] A. Korn, "Zwei Anwendungen der Methode der Sukzessiven Annäherungen". Mathematische Abhandlungen. Herman Amandus Schwartz zu seinen fünfzigjährigen Doktorjubiläum, pp 215-229, Springer Berlin 1914.
- [Lich] L. Lichtenstein, "Zur theorie der Konformen...", Bull. Acad. Sci. Cracovie (1916), 192-217.
- [Li 1] E. Lima, "Introdução a topologia diferencial", Rio de Janeiro I.M.P.A. 1961.
- [Li 2] E. Lima, "Introdução as variedades diferenciáveis", Porto Alegre "EMMA" 1961.
- [Mag] W. Magnus, "Non euclidean tessellations and their groups", Academic Press, New York.
- [Mi 1] J. Milnor, "Hyperbolic geometry: The first 150 years", Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 6 No. 1, 1982.
- [Mi 2] J. Milnor, "Morse theory", Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press.
- [Mr] C.P. Morrey, "On the solution of quasilinear elliptic partial differential equations", Trans. Amer. Soc. 43 (1938), 126-166.
- [Mo] G.D. Mostow, "Strong rigidity of locally symmetric spaces", Princeton University Press (Ann. of Math. Studies 78).
- [Ril] R. Riley, "A quadratic parabolic group", Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77, 281-288.
- [Sa] L. Santaló, "Las geometrías no euclidianas", Editorial EUDEBA, Buenos Aires.
- [Th 1] W. Thurston, "The Geometry and topology of 3-manifolds", Princeton

